

Definition and format for the Phantom file

LPI

October 9, 2023

1 Introduction

We are interested in simulating objects with moving spins in the KomaMRI simulator as realistically as possible. For that, we need to define a format to store a digital phantom including information on how the position of the spins changes with time. In the first stage, we will work with “motion” instead of “flow”. The former assumes that the spins remain in the Field of View (FOV) at all times, whereas the latter assumes that spins can enter or exit the FOV at different times. The motivation is to create digital phantoms from the available pig and human heart data.

2 Motion definition

The motion model, that needs to be encoded in the phantom, is

$$\mathbf{x}_n(t) = \mathbf{x}_n^0 + \mathbf{f}_n(\boldsymbol{\beta}_n, t) \quad 0 \leq t < S$$

where $\mathbf{x}_n(t)$ is the position of spin n at time t . The initial position, at $t = 0$, is \mathbf{x}_n^0 and the vector functions $\mathbf{f}_n(\boldsymbol{\beta}_n, t)$ (of 1, 2 or 3 dimensions) define the displacements associated with spin n and dependent on parameters $\boldsymbol{\beta}_n$. This definition is valid for a time segment of duration S , but the simulator will evaluate it periodically such that

$$\mathbf{x}_n(t) = \mathbf{x}_n^0 + \mathbf{f}_n(\boldsymbol{\beta}_n, t - kS) \quad kS \leq t < (k + 1)S.$$

2.1 Multi-segments

For allowing quasi-periodic motion, an arrhythmic heart, for instance, the motion can also be defined as multi-segments. Instead of having only one segment duration, S , it is possible to define a vector of segments’ durations: $\mathbf{S} = [S_o \ S_1 \ \dots]$. In this case, the motion model is defined for the first segment of duration S_o , and for the rest of the segments (segment i) the model will be stretched or contracted to fit the duration of that segment (S_i). If the simulation time goes beyond the last defined segment, the sequence is repeated, starting with the first segment again.

2.2 Motion models

The definition of the displacements by the functions $\mathbf{f}_n(\boldsymbol{\beta}_n, t)$ is flexible, and an increasing number of models are expected to be incorporated into the simulator. There are two types of models: interpolated and analytical.

Interpolated models define an interpolation method (linear, cubic, etc.) to find the displacement at an arbitrary time from equally-spaced displacements. In other words, the parameter $\boldsymbol{\beta}_n$ are the actual displacements: $\boldsymbol{\beta}_n = [\Delta x_n^1 \ \Delta x_n^2 \ \dots]$. The interpolated models assume that the segment is divided into pieces. Each piece has a starting and ending displacement, between which the desired displacement will be interpolated. The ending displacement is the same as the starting displacement of the following piece. The starting displacement of the first piece and the ending displacement of the final piece are always assumed to be zero and are not stored in the file. This means that a segment of K pieces requires the storage of $K - 1$ displacements.

Analytical models, on the other hand, define an analytical function (of parameter $\boldsymbol{\beta}_n$) to find the displacement. For example a sinusoid with β^0 , β^1 , and β^2 amplitude, frequency, and phase.

3 File format: .phantom

The following definition of the `.phantom` file allows storing all the relevant parameters needed for the simulation, including the parameters of the motion models. All the variables associated with each spin, except its position, can be explicit or indexed. If they are explicit, the value for each spin is explicitly stored in the file. If they are indexed, the file will contain a lookup table with some values for that variable, and an index into this table is stored for each spin, instead of the value. This mechanism allows for many spins to share the same property and simplifies changing that property because changing the value in the lookup table will affect all those spins. The file will be stored in HD5 format with the following sections:

1. Header. General information about the phantom.

```
Version =      # String: identifier of format version
Ns =          # Integer: number of spins
Dims =        # <1|2|3>: number of spatial dimensions
Dynamic =     # Boolean: whether spins move or not
```

2. Position. Vectors with the initial position of all spins, \mathbf{x}_n^0

```
position/x =   # Float: Ns x 1 array with spatial positions in x, always present
position/y =   # Float: Ns x 1 array with spatial positions in y, only if Dims>1
position/z =   # Float: Ns x 1 array with spatial positions in z, only if Dims>2
```

3. Contrast. This section will contain all the variables affecting the image's contrast: spin density ρ , relaxation constants $T1$ and $T2$, and field deviations or off-resonance $\Delta\omega$. In the future, more parameters can be added. These variables can be of type explicit, indexed, or default. The default type indicates to the simulator that the values are not specified in this file and that it should use the internally defined default.

```
contrast/rho/type =      # String: <"Explicit"|"Indexed"|"Default">
contrast/rho/N =        # If type is "Indexed"
                        # Integer: number of entries in the lookup table
contrast/rho/values =   # If type is "Explicit"
                        # Float: Ns x 1 array with rho values
                        # If type is "Indexed"
                        # Integer: Ns x 1 array with indices into the table
                        # If type is "Default" this field is ignored
contrast/rho/table =    # If type is "Indexed"
                        # Float: N x 1 array with rho values
```

The groups for $T1$, $T2$, or $\Delta\omega$ are defined analogously by replacing `rho` with `T1`, `T2` or `Deltaw`.

4. Motion. This section contains all the information necessary for finding the position of each spin at an arbitrary time. The first group defines the number and duration of each segment and the number of pieces per segment. Here we assume an interpolated model.

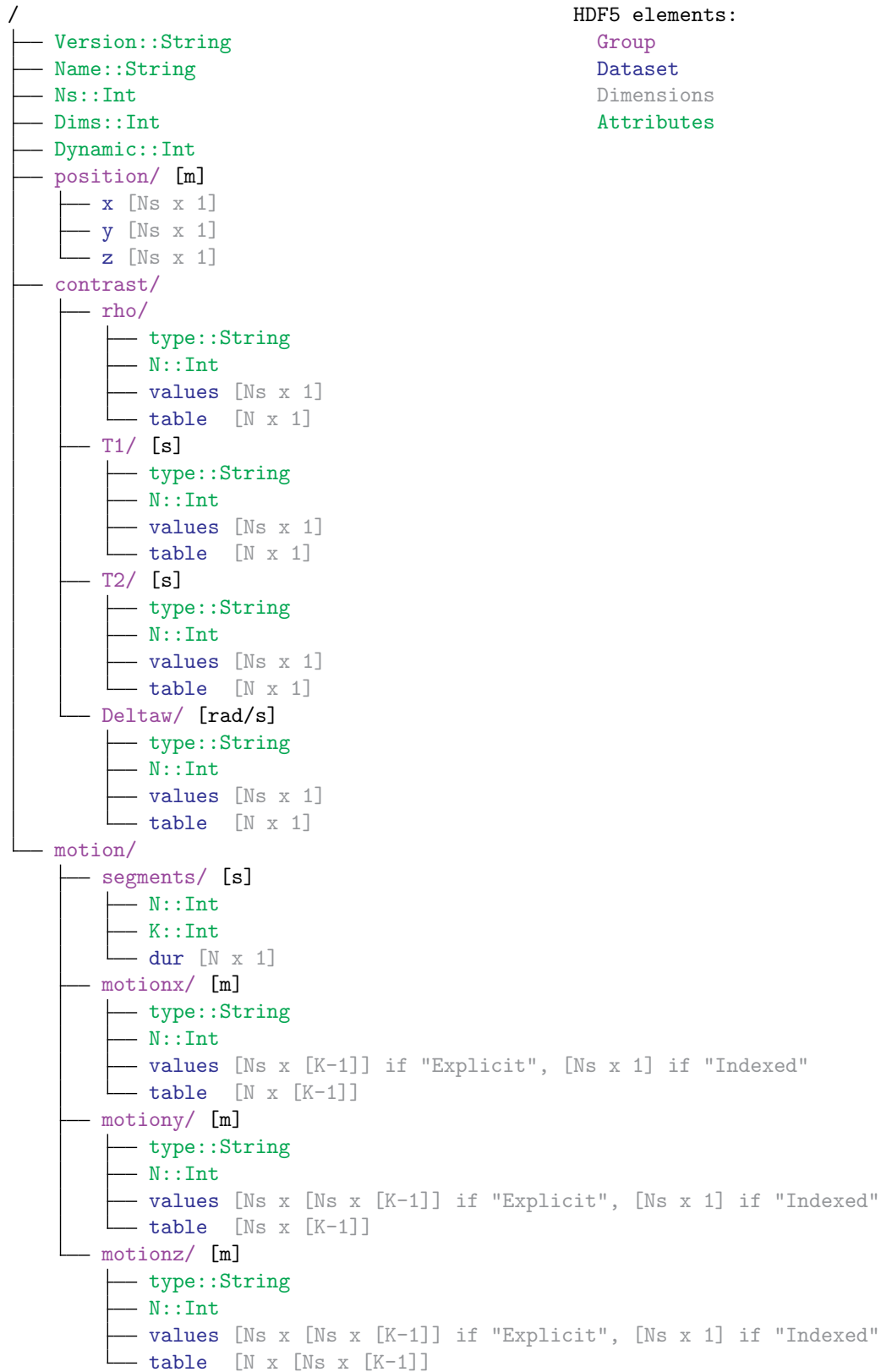
```
motion/segments/N =     # Integer: Number of segments
motion/segments/dur =   # Float: N x 1 array with duration of each segment
motion/segments/K =     # Integer: Number of pieces per segment
```

The following groups define the motions in x , y and z .

```
motion/motionx/type = # String: <"Explicit"|"Indexed">
motion/motionx/N = # If type is "Indexed"
# Integer: number of entries in the lookup table
motion/motionx/values = # If type is "Explicit"
# Float: Ns x (K-1) array of displacements
# If type is "Indexed"
# Integer: Ns x 1 array with indices into the table
motion/motionx/table = # If type is "Indexed"
# Float: N x (K-1) array with displacements
```

This group is repeated for motiony and motionz if necessary.

Phantom file directory tree (HDF5)



Ejemplos de modelos de movimiento

Velocidad constante

Un desplazamiento trivial es el de velocidad constante. El espín se mueve de su posición inicial \mathbf{x}^0 a su posición final \mathbf{x}^1 con velocidad \mathbf{v} (por simplicidad de notación no escribimos el subíndice n que indica la dependencia del espín), es decir

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^0 + \mathbf{v}t$$

o

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^0 + \mathbf{f}(\boldsymbol{\beta}, t/S) = \mathbf{x}^0 + \boldsymbol{\beta}_1(t/S)$$

es decir

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\beta}, t) = \boldsymbol{\beta}_0 + \boldsymbol{\beta}_1 t$$

con $\boldsymbol{\beta}_0 = 0$ y $\boldsymbol{\beta}_1 = \mathbf{v}S$.

En el archivo de parámetros se guardarían dos parámetros por dirección. Para el caso 1D, se tendría `Nmotionparx = 2`, y `motionparx` (o `motionparxtable`) sería una matriz de $N_s \times 2$ (o `Nmotionsx x 2`) con los valores $[0, \mathbf{v}_x S]$.

Interpolaciones

Probablemente, las dos trayectorias más útiles serán la interpolación lineal y la interpolación cúbica (splines). Para recopilar toda la información en un mismo documento, aquí se describen en detalle sus formulaciones.

1. Lineal.

- (a) **Un tramo.** Este caso es equivalente a velocidad constante. Los desplazamientos están definidos para el comienzo y final: $\Delta \mathbf{x}^0$ y $\Delta \mathbf{x}^1$ (normalmente $\Delta \mathbf{x}^0 = 0$).

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\beta}, t) = \mathbf{f}_0(\boldsymbol{\beta}, t) = \boldsymbol{\beta}_0 + \boldsymbol{\beta}_1 t \quad \text{con } \boldsymbol{\beta} = [\Delta \mathbf{x}^0, (\Delta \mathbf{x}^1 - \Delta \mathbf{x}^0)]$$

En el archivo de parámetros se guardarían dos parámetros por dirección. Para la dirección x , se tendría `Nmotionparx = 2`, y `motionparx` (o `motionparxtable`) sería una matriz de $N_s \times 2$ (o `Nmotionpars x 2`):

$$\text{motionparx}(n, :) = [\Delta x^0, (\Delta x^1 - \Delta x^0)]$$

- (b) **K tramos.** Generalizando, y suponiendo que el espín tiene desplazamientos $\Delta \mathbf{x}^0, \Delta \mathbf{x}^1 \dots \Delta \mathbf{x}^K$ (normalmente $\Delta \mathbf{x}^0 = 0$), tenemos

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\beta}, t) = \begin{cases} \mathbf{f}_0(\boldsymbol{\beta}_0, t/Kh) = \boldsymbol{\beta}_{00} + \boldsymbol{\beta}_{01} t/Kh & \text{si } 0 \leq t < h \\ \mathbf{f}_1(\boldsymbol{\beta}_1, (t-h)/Kh) = \boldsymbol{\beta}_{10} + \boldsymbol{\beta}_{11} (t-h)/Kh & \text{si } h \leq t < 2h \\ \vdots & \\ \mathbf{f}_{K-1}(\boldsymbol{\beta}_{K-1}, (t-kh)/Kh) = \boldsymbol{\beta}_{(K-1)0} + \boldsymbol{\beta}_{(K-1)1} (t-(K-1)h)/Kh & \text{si } (K-1)h \leq t < Kh \end{cases}$$

con $h = S/K$ (o S_i si se trata de uno de los P segmentos).

Las condiciones para calcular los parámetros $\boldsymbol{\beta}$, con $k = 0 \dots K-1$, son

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_k(\boldsymbol{\beta}_k, kh) &= \Delta \mathbf{x}^k \\ \mathbf{f}_k(\boldsymbol{\beta}_k, (k+1)h) &= \Delta \mathbf{x}^{k+1} \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta}_{k0} &= (k+1)\Delta \mathbf{x}^k - k\Delta \mathbf{x}^{k+1} \\ \boldsymbol{\beta}_{k1} &= \frac{\Delta \mathbf{x}^{k+1} - \Delta \mathbf{x}^k}{h} \end{aligned}$$

Nótese que normalmente $\beta_{00} = \Delta \mathbf{x}^0$ normalmente será 0, pero se mantiene aquí por completitud. En el archivo de parámetros se guardarían $2K$ parámetros por dirección. Para la dirección x , se tendría $N_{\text{motionparx}} = 2K$, y `motionparx` (o `motionparxtable`) sería una matriz de $N_s \times 2K$ (o `Nmotionpars` $\times 2K$):

$$\begin{aligned} \text{motionparx}(\mathbf{n}, :) &= [\beta_{00}, \beta_{01}, \beta_{10}, \beta_{11} \dots \beta_{(K-1)0}, \beta_{(K-1)1}] \\ &= [\Delta x^0, K(\Delta x^1 - \Delta x^0), (2\Delta x^1 - \Delta x^0), K(\Delta x^2 - \Delta x^0), \dots] \end{aligned}$$

2. **Cúbica.** La idea es idéntica a la interpolación lineal, pero ahora utilizamos polinomios de tercer grado para imponer continuidad C^0 , C^1 y C^2 . Las condiciones de continuidad no son suficientes para definir completamente los parámetros, por lo que se necesitan dos condiciones más. Las splines “naturales” imponen una segunda derivada nula en los extremos (0 y 1) y las splines “periódicas” imponen que las primeras y segundas derivadas sean iguales en los extremos. Probablemente conviene utilizar las naturales para cuando la función no sea periódica y las periódicas para cuando lo sea.

- (a) **Un tramo.** El espín tiene desplazamientos $\Delta \mathbf{x}^0$ y $\Delta \mathbf{x}^1$.

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\beta}, t) = \mathbf{f}_0(\boldsymbol{\beta}_0, t) = \beta_{00} + \beta_{01}t + \beta_{02}t^2 + \beta_{03}t^3$$

Sus derivadas son $\mathbf{f}'_0(\boldsymbol{\beta}_0, t) = \beta_{01} + 2\beta_{02}t + 3\beta_{03}t^2$ y $\mathbf{f}''_0(\boldsymbol{\beta}_0, t) = 2\beta_{02} + 6\beta_{03}t$.

- i. Las condiciones C^0 son

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_0(\boldsymbol{\beta}_0, 0) &= \beta_{00} = \Delta \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{f}_0(\boldsymbol{\beta}_0, 1) &= \beta_{00} + \beta_{01} + \beta_{02} + \beta_{03} = \Delta \mathbf{x}^1 \end{aligned}$$

- ii. No hay condiciones C^1 (primera derivada) por tratarse solo de un tramo.
iii. No hay condiciones C^2 (segunda derivada) por tratarse solo de un tramo.
iv. Las condiciones de extremo, para la spline natural son

$$\begin{aligned} \mathbf{f}''_0(\boldsymbol{\beta}_0, 0) &= \beta_{02} = 0 \\ \mathbf{f}''_0(\boldsymbol{\beta}_0, 1) &= \beta_{02} + 3\beta_{03} = 0 \end{aligned}$$

Para un tramo, la spline es simplemente una interpolación lineal

$$\mathbf{f}_0(\boldsymbol{\beta}_0, t) = \Delta \mathbf{x}^0 + (\Delta \mathbf{x}^1 - \Delta \mathbf{x}^0)t$$

tanto para la spline natural como periódica.

En el archivo de parámetros se guardarían dos parámetros por dirección. Para la dirección x , se tendría $N_{\text{motionparx}} = 2$, y `motionparx` (o `motionparxtable`) sería una matriz de $N_s \times 2$ (o `Nmotionpars` $\times 2$):

$$\text{motionparx}(\mathbf{n}, :) = [\Delta x^0, (\Delta x^1 - \Delta x^0)]$$

- (b) **K tramos.** Los espines tienen desplazamientos $\Delta \mathbf{x}^0, \Delta \mathbf{x}^1 \dots \Delta \mathbf{x}^K$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\beta}, t) = \begin{cases} \mathbf{f}_0(\boldsymbol{\beta}_0, t) = \beta_{00} + \beta_{01}t + \beta_{02}t^2 + \beta_{03}t^3 & \text{si } 0 \leq t < h \\ \mathbf{f}_1(\boldsymbol{\beta}_1, t) = \beta_{10} + \beta_{11}t + \beta_{12}t^2 + \beta_{13}t^3 & \text{si } h \leq t < 2h \\ \vdots & \\ \mathbf{f}_{K-1}(\boldsymbol{\beta}_{K-1}, t) = \beta_{(K-1)0} + \beta_{(K-1)1}t + \beta_{(K-1)2}t^2 + \beta_{(K-1)3}t^3 & \text{si } (K-1)h \leq t < Kh \end{cases}$$

con $h = 1/K$.

i. Las $2K$ condiciones C^0 , con $k = 0 \dots K - 1$, son

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_k(\boldsymbol{\beta}_k, kh) = \Delta \mathbf{x}^k &\implies \boldsymbol{\beta}_{k0} + \boldsymbol{\beta}_{k1}kh + \boldsymbol{\beta}_{k2}(kh)^2 + \boldsymbol{\beta}_{k3}(kh)^3 = \Delta \mathbf{x}^k \\ \mathbf{f}_k(\boldsymbol{\beta}_k, (k+1)h) = \Delta \mathbf{x}^{k+1} &\implies \boldsymbol{\beta}_{k0} + \boldsymbol{\beta}_{k1}(k+1)h + \boldsymbol{\beta}_{k2}((k+1)h)^2 + \boldsymbol{\beta}_{k3}((k+1)h)^3 = \Delta \mathbf{x}^{k+1} \end{aligned}$$

ii. Las $K - 1$ condiciones C^1 , con $k = 0 \dots K - 2$, son

$$\begin{aligned} \mathbf{f}'_{k+1}(\boldsymbol{\beta}_{k+1}, kh) &= \mathbf{f}'_k(\boldsymbol{\beta}_k, (k+1)h) \\ \implies \boldsymbol{\beta}_{(k+1)1} + 2\boldsymbol{\beta}_{(k+1)2}kh + 3\boldsymbol{\beta}_{(k+1)3}(kh)^2 &= \boldsymbol{\beta}_{k1} + 2\boldsymbol{\beta}_{k2}(k+1)h + 3\boldsymbol{\beta}_{k3}((k+1)h)^2 \end{aligned}$$

iii. Las $K - 1$ condiciones C^2 , con $k = 0 \dots K - 2$, son

$$\begin{aligned} \mathbf{f}''_{k+1}(\boldsymbol{\beta}_{k+1}, kh) &= \mathbf{f}''_k(\boldsymbol{\beta}_k, (k+1)h) \\ \implies 2\boldsymbol{\beta}_{(k+1)2} + 6\boldsymbol{\beta}_{(k+1)3}kh &= 2\boldsymbol{\beta}_{k2} + 6\boldsymbol{\beta}_{k3}(k+1)h \end{aligned}$$

iv. Las condiciones de extremo, para la spline natural son

$$\begin{aligned} \mathbf{f}''_0(\boldsymbol{\beta}_0, 0) &= \boldsymbol{\beta}_{02} = 0 \\ \mathbf{f}''_{K-1}(\boldsymbol{\beta}_{K-1}, 1) &= \boldsymbol{\beta}_{(K-1)2} + 3\boldsymbol{\beta}_{(K-1)3} = 0 \end{aligned}$$

Y para la spline periódica

$$\begin{aligned} \mathbf{f}'_0(\boldsymbol{\beta}_0, 0) &= \mathbf{f}'_{K-1}(\boldsymbol{\beta}_{K-1}, 1) \implies \boldsymbol{\beta}_{01} = \boldsymbol{\beta}_{(K-1)1} + 2\boldsymbol{\beta}_{(K-1)2} + 3\boldsymbol{\beta}_{(K-1)3} \\ \mathbf{f}''_0(\boldsymbol{\beta}_0, 0) &= \mathbf{f}''_{K-1}(\boldsymbol{\beta}_{K-1}, 1) \implies \boldsymbol{\beta}_{02} = \boldsymbol{\beta}_{(K-1)2} + 3\boldsymbol{\beta}_{(K-1)3} \end{aligned}$$

Falta colocar aquí un resumen matricial de las ecuaciones que hay que resolver.

4 Generación de movimientos

4.1 Casos sintéticos

4.2 Deformaciones a partir imágenes reales: Deformaciones de forma libre (FFDs)

Se pretende definir una transformación que modele el movimiento cardiaco de forma realista. Con este objetivo, partiremos de imágenes reales de cine MRI cardiaco y estimaremos el movimiento del corazón mediante el registrado grupal de las mismas basado en FFDs. Registrar todos los frames de un cine cardiaco de forma grupal supone definir a dónde se desplaza cada píxel/vóxel de una imagen de referencia común en cada uno de los frames, que representan fases cardíacas diferentes, como se muestra en la Fig. 1.

Definiremos las transformaciones espaciales bajo el paradigma de las FFDs, que permiten modelar localmente deformaciones elásticas, manipulando una rejilla de puntos de control distribuidos por la imagen con una resolución arbitraria. El registro basado en FFDs utiliza funciones B-spline para definir las transformaciones. Comúnmente, se usan B-splines de orden 3 (B_3) por el buen balance que presentan entre suavidad y región de soporte. La siguiente ecuación define las transformaciones L -D basadas en FFDs:

$$\mathbf{T}_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}, n) = \mathbf{x} + \mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}, n) = \mathbf{x} + \sum_{\mathbf{u} \in \mathcal{N}(\mathbf{x})} \left(\prod_{l=1}^L B_3 \left(\frac{x_l - p_{u_l}}{\Delta_l} \right) \right) \cdot \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{u}, n}, \quad (1)$$

donde $\mathbf{u} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_K\}$ representa el conjunto de puntos de control equiespaciados con una distancia $\boldsymbol{\Delta} = (\Delta_1, \dots, \Delta_L)$ en píxeles, mientras que $\mathbf{p}_{\mathbf{u}} = (p_{u_1}, \dots, p_{u_L})$ representa la posición del punto de control en el espacio de la imagen. Cada punto de control tiene asociado un parámetro de desplazamiento ($\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{u}}$). A continuación (Fig. 2), se muestra un ejemplo de transformación en un espacio unidimensional:

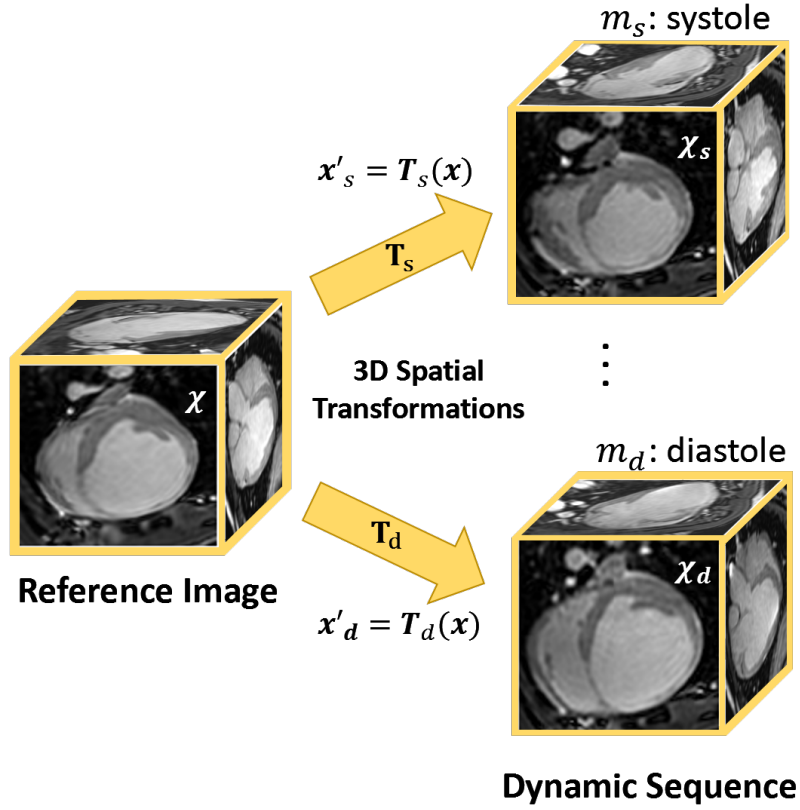


Figure 1: Esquema de registro grupal en cine cardiaco 3D.

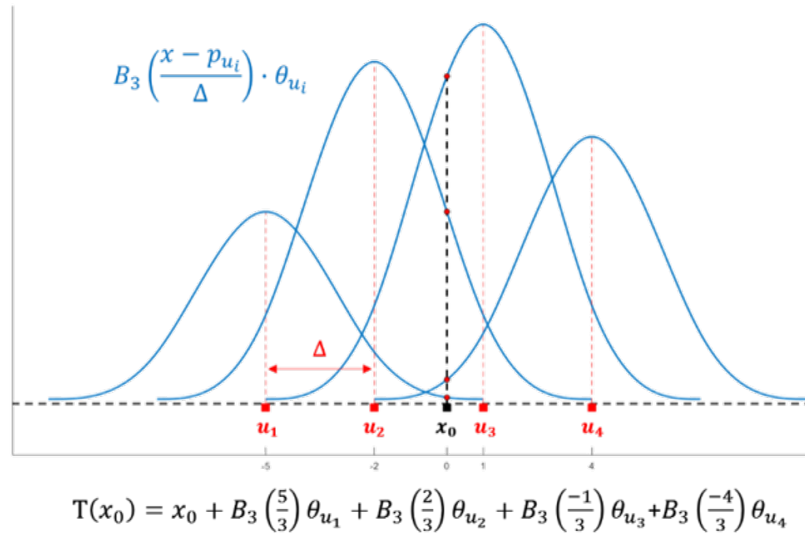


Figure 2: Ejemplo de transformación en un espacio 1D.

El objetivo del proceso de registro es encontrar el conjunto de parámetros $\Theta = \{\theta_{u,n}, n = 1, \dots, N\}$, siendo N el número total de frames del cine cardiaco, mediante un proceso de optimización que minimiza una cierta función de coste.

Una vez que dispongamos del conjunto optimizado de parámetros $\hat{\Theta}$, podremos evaluar la transformación para cualquier posición arbitraria (posición de cada *spin*) según la expresión de la ecuación (1),

con la resolución temporal dada por las imágenes registradas. En un paso posterior, serán las curvas de desplazamiento resultantes ($\mathbf{D}_\theta(\mathbf{x}, n)$) las que parametrizaremos según se ha indicado en secciones anteriores.