PRML 演習 2.41-2.42

@daimatz

(2.41) ガンマ関数 (1.141) の定義から，ガンマ分布 (2.146) が正規化されていることを示せ.

$$\Gamma(x) \equiv \int_0^\infty u^{x-1} e^{-u} du \tag{1.141}$$

$$\mathrm{Gam}(\lambda|a,b) = \frac{1}{\Gamma(a)} b^a \lambda^{a-1} \exp(-b\lambda) \tag{2.146}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^\infty \mathrm{Gam}(\lambda|a,b) d\lambda &= \int_{-\infty}^0 0 d\lambda + \int_0^\infty \mathrm{Gam}(\lambda|a,b) d\lambda \\
&= \frac{b^a}{\Gamma(a)} \int_0^\infty \lambda^{a-1} \exp(-b\lambda) d\lambda \quad (b\lambda = x \text{ とおく}) \\
&= \frac{b^a}{\Gamma(a)} \frac{1}{b} \int_0^\infty \left(\frac{x}{b}\right)^{a-1} \exp(-x) dx \\
&= \frac{b^{a-1}}{\Gamma(a)} \frac{1}{b^{a-1}} \int_0^\infty x^{a-1} \exp(-x) dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(a)} \Gamma(a) \\
&= 1
\end{aligned}$$

(2.42) ガンマ分布 (2.146) の平均，分散，およびモードを求めよ.

平均

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\lambda] &= \int_0^\infty \lambda \mathrm{Gam}(\lambda|a,b) d\lambda \\
&= \frac{b^a}{\Gamma(a)} \int_0^\infty \lambda^a \exp(-b\lambda) d\lambda \\
&= \frac{b^a}{\Gamma(a)} \frac{1}{b} \int_0^\infty \left(\frac{x}{b}\right)^a \exp(-x) dx \\
&= \frac{1}{b\Gamma(a)} \int_0^\infty x^{(a+1)-1} \exp(-x) dx \\
&= \frac{1}{b\Gamma(a)} \Gamma(a+1) \quad (\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \text{ より}) \\
&= \frac{1}{b\Gamma(a)} a\Gamma(a) \\
&= \frac{a}{b}
\end{aligned}$$

分散は，まず平均のときと同じようにして $\mathbb{E}[\lambda^2]$ が

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\lambda^2] &= \int_0^\infty \lambda^2 \mathrm{Gam}(\lambda|a,b)d\lambda \\ &= \frac{1}{b^2\Gamma(a)}\Gamma(a+2) \\ &= \frac{a(a+1)}{b^2}\end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned}\mathrm{var}[\lambda] &= \mathbb{E}[\lambda^2] - \mathbb{E}[\lambda]^2 \\ &= \frac{a(a+1)}{b^2} - \frac{a^2}{b^2} \\ &= \frac{a}{b^2}\end{aligned}$$

また (2.146) を λ で微分して

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\lambda}\mathrm{Gam}(\lambda|a,b) &= \frac{b^a}{\Gamma(a)}\big((a-1)\lambda^{a-2}\exp(-b\lambda) + \lambda^{a-1}\cdot(-b)\exp(-b\lambda)\big) \\ &= \frac{b^a}{\Gamma(a)}\lambda^{a-2}\exp(-b\lambda)\left((a-1)-b\lambda\right)\end{aligned}$$

よってモードは $\lambda = \dfrac{a-1}{b}$