2019 年度 首都大学東京 大学院（博士前期課程）
理学研究科　数理科学専攻
入学試験（2019 年 2 月 7 日）
数学 I (9:30 – 11:30)

1. 線形代数, 微分積分 計 4 題を解答しなさい.

2. 問題ごとに別の答案用紙を用いること.

3. すべての答案用紙に, 氏名・受験番号・解答する問題の番号を記入すること.

4. 試験終了後, 答案用紙は 4 枚とも提出すること. 問題用紙と計算用紙は各自持ち帰ること.

問題 1． n を自然数とする．実 n 次正方行列の全体を V とするとき，V は通常の行列のスカラー倍と行列の和に関して実ベクトル空間となる．以下の問いに答えよ．

(1) V の次元を求めよ．

(2) f を V から $\mathbb{R}$ への線形写像とする．このとき，ある行列 $A \in V$ が存在して，任意の行列 $X \in V$ に対して

$$f(X) = \mathrm{tr}(AX)$$

と書けることを示せ．ただし，行列 B の (i, j) 成分が b_{ij} のとき，B のトレースを $\mathrm{tr}(B) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii}$ で定める．

問題 2． 4 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^4$ において，3 つのベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix}$$

によって張られる部分空間を W とする．以下の問いに答えよ．

(1) W の次元を求めよ．

(2) $\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ が垂直となるような実数 t の値を求めよ．

(3) 長さが 1 のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ p \\ q \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$ が W の直交補空間 $W^{\perp}$ に属するとき，実数 p, q の値を求めよ．さらにこの $\boldsymbol{x}$ を含むような $W^{\perp}$ の正規直交基底を 1 組求めよ．

問題３． a, b を正の実数とし, $\mathbb{R}^2$ 上の次の 3 点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ を頂点とする三角形の面積を S とする.

$$\mathrm{A}(a\cos\alpha, b\sin\alpha), \quad \mathrm{B}(a\cos\beta, b\sin\beta), \quad \mathrm{C}(a\cos\gamma, b\sin\gamma)$$

ただし $0 \leq \alpha < \beta < \gamma < 2\pi$ とする. 以下の問いに答えよ.

(1) $s = \gamma - \beta,\ t = \beta - \alpha$ とするとき S を s, t を用いて表せ.

(2) $0 < s < 2\pi,\ 0 < t < 2\pi,\ 0 < s + t < 2\pi$ の範囲における S の最大値と, そのときの s, t の値を求めよ.

問題４． 以下の問いに答えよ.

(1) 数列 $\{a_n\}$ を $a_n = n$ とするとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して級数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{a_n^{1+\varepsilon}}$ は収束することを示せ.

次に数列 $\{a_n\}$ は以下の条件を満たすとする.

- $a_1 > 0$
- 各 n に対して $a_n < a_{n+1}$
- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して級数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{a_n^{1+\varepsilon}}$ は収束することを示せ.

(3) 級数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{a_n}$ は発散することを次の場合に分けて示せ.

(i) ある部分列 $\{a_{n_i}\}$ で $a_{n_i} > 2a_{n_i - 1}$ となるものが存在する場合.

(ii) ある n_0 で $n \geq n_0$ ならば $2a_{n-1} \geq a_n$ となるものが存在する場合.

2019 年度 首都大学東京 大学院（博士前期課程）
理学研究科　数理科学専攻
入学試験（2019 年 2 月 7 日）
数学 II (13:00 – 14:30)

1. 問題は全部で 9 題ある．そのうちの 2 題を選択して解答しなさい．

2. 問題ごとに別の答案用紙を用いること．

3. すべての答案用紙に, 氏名・受験番号・解答する問題の番号を記入すること．

4. 試験終了後, 答案用紙は 2 枚とも提出すること．問題用紙と計算用紙は各自持ち帰ること．

問題１． 行列

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 5 & 3 \\ -1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

について, 以下の問いに答えよ.

(1) A の固有多項式, 最小多項式をそれぞれ求めよ.

(2) A のジョルダン標準形 J と $J = P^{-1}AP$ となる正則行列 P を 1 組求めよ.

問題２． $GL(2,\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}$ 上の 2 次一般線形群（正則な実 2 次正方行列全体のなす群）とする. $\mathbb{R}^* = \{a \in \mathbb{R} \mid a \neq 0\}$ を乗法に関して群と考え, 直積集合 $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ に群 $\mathbb{R}^*$ の直積としての群の構造を与える.

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 & a \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \;\middle|\; a_1, a_2 \in \mathbb{R}^*,\ a \in \mathbb{R} \right\}, \quad N = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \right\}$$

とおくとき, 以下の問いに答えよ.

(1) H が $GL(2,\mathbb{R})$ の部分群であることを示せ.

(2) 次の条件 (a), (b) を両方とも満たす写像 $f : H \to \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ を 1 つ定義せよ. また, その f が実際に (a), (b) を満たすことを示せ.

(a) f は準同型写像である　　(b) $\mathrm{Ker}(f) = N$

(3) N は $GL(2,\mathbb{R})$ の正規部分群か？ 理由とともに答えよ.

(4) 次の条件 (c), (d) を両方とも満たす群 G と写像 $g : GL(2,\mathbb{R}) \to G$ は存在するか？ 理由とともに答えよ.

(c) g は準同型写像である　　(d) $\mathrm{Ker}(g) = N$

問題３． 2 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ の任意の部分集合 A に対して $\mathbb{R}^2$ の部分集合 $c(A)$ を

$$c(A) = \{(x+t, y+t) \mid (x, y) \in A,\ t \geq 0\}$$

と定義する．ただし空集合 $\varnothing$ に対しては $c(\varnothing) = \varnothing$ とする．また $\mathbb{R}^2$ の位相は標準的なものとする．以下の問いに答えよ．

(1) $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ に対して $c(A)$ の概形を図示せよ．

(2) $\mathbb{R}^2$ の任意の部分集合 A に対して

$$c(c(A)) = c(A)$$

となることを示せ．

(3) $\mathbb{R}^2$ の任意の開集合 U に対して, $c(U)$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合であることを示せ．

(4) $\mathbb{R}^2$ の任意の開集合 U, V に対して, $\mathbb{R}^2$ のある開集合 W が存在して

$$c(U) \cap c(V) = c(W)$$

となることを示せ．

問題４． $\mathbb{R}^3$ のベクトル場 $\boldsymbol{F} = (y, -x, 2xy^2 + 1)$, および 2 つの曲面

$$S_1 \ :\ x^2 + y^2 \leq 5,\ z = 0, \qquad S_2 \ :\ z = 5 - x^2 - y^2,\ z \geq 0$$

について, 以下の問いに答えよ．

(1) $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F}$ を求めよ．

(2) 面積分

$$I_1 = \iint_{S_1} \mathrm{rot}\ \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}$$

の値を求めよ．ただし, 単位法線ベクトルは z 成分が非負とする．

(3) 曲面 S_2 の概形を図示せよ．

(4) 面積分

$$I_2 = \iint_{S_2} \mathrm{rot}\ \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}$$

の値を求めよ．ただし, 単位法線ベクトルは z 成分が非負とする．

問題５． C^∞ 級写像 $p:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ を

$$p(u,v)=((2+\cos v)\cos u,(2+\cos v)\sin u,\sin v)$$

と定める．また点 $(u_0,v_0)\in\mathbb{R}^2$ に対して，開集合 $D[u_0,v_0]\subset\mathbb{R}^2$ を

$$D[u_0,v_0]=(u_0-\pi,u_0+\pi)\times(v_0-\pi,v_0+\pi)$$

と定める．さらに集合 $T\subset\mathbb{R}^3$ を

$$T=\{(x,y,z)\mid(\sqrt{x^2+y^2}-2)^2+z^2=1\}$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(1) 写像 $p:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ の各点 $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ におけるヤコビ行列の階数を求めよ．

(2) 任意の $(u_0,v_0)\in\mathbb{R}^2$ に対して，写像 p が $D[u_0,v_0]$ 上単射になることを示せ．

(3) $T=p(\mathbb{R}^2)$ を示せ．

(4) (1),(2),(3) より，T のガウス曲率を K としたとき，

$$\iint_T K\,dA$$

の値を求めよ．ただし dA は T の面積要素とする．

問題６． 複素関数 $f(z)=\dfrac{1}{e^z-1}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $f(z)$ のすべての極と，それらの位数を求めよ．

(2) $z=0$ でローラン展開したときの主要部 $P(z)$ を求めよ．

(3) $z=0$ でのローラン展開が，以下の形であることを示せ．

$$f(z)=P(z)-\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_k}{(2k)!}z^{2k-1}$$

(4) (3) のローラン展開における B_1,B_2 を求めよ．

問題７． m を自然数, I を空でない 1 次元開区間とし, $a_1(t), a_2(t), \ldots, a_m(t)$ を I 上の実数値連続関数とする．$y_1(t), y_2(t), \ldots, y_m(t)$ を m 階線形微分方程式

$$x^{(m)}(t) + a_1(t)x^{(m-1)}(t) + \cdots + a_{m-1}(t)x'(t) + a_m(t)x(t) = 0$$

の I 上での解とし, $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_m(t)$ のロンスキー行列式を $W(t)$ で表す．以下の問いに答えよ．

(1) I 上で

$$W'(t) = -a_1(t)W(t)$$

が成り立つことを示せ．

(2) W が I 上で恒等的に 0 であるための必要十分条件は, ある $t_0 \in I$ が存在して $W(t_0) = 0$ となることを, (1) を用いて示せ．

問題８． この問いでは, グラフは無向単純グラフのこととする．すなわち, 辺に向きは定めず, ループ（両端点が同じ頂点である辺）や多重辺（同じ端点集合をもつ複数の辺）を持たないものとする．

頂点集合 V と辺集合 E からなるグラフ $G = (V, E)$ を考える．$v, w \in V$ に対して, 頂点 v と w を結ぶ辺を vw で表す．$v_0, v_1, \ldots, v_l \in V$ として, すべての $i = 0, 1, \ldots, l-1$ に対して, $v_i v_{i+1} \in E$ であるとき, 頂点の列 $W = (v_0, v_1, \ldots, v_l)$ を歩道という．$v_0 = v_l$ であり, 辺 $v_0v_1, v_1v_2, \ldots, v_{l-1}v_l$ がすべて異なるとき, W を回路という．W が 1 辺以上含む回路であり, 頂点 $v_1, v_2, \ldots, v_l$ がすべて異なるとき, W を閉路という．

m, n を正の整数とする．$w_1, w_2, \ldots, w_{m+n}$ を相異なる頂点として, $V_1 = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$, $V_2 = \{w_{m+1}, w_{m+2}, \ldots, w_{m+n}\}$, $V = V_1 \cup V_2$, $E = \{w_i w_j \mid 1 \le i \le m,\ m+1 \le j \le m+n\}$ とおく．グラフ (V, E) を $K_{m,n}$ で表す．以下の問いに答えよ．

(1) $K_{2,3}$ の隣接行列 A と, A^2 のトレース $\mathrm{tr}(A^2)$ を求めよ．ただし, A の第 i 行, 第 i 列が頂点 w_i に対応するものとする．

(2) $K_{3,4}$ の部分グラフで $K_{2,3}$ と同型なものの個数を求めよ．

(3) $K_{m,n}$ がオイラーグラフであるための必要十分条件を求めよ．ただし, すべての辺を 1 回ずつ通る回路が存在するグラフをオイラーグラフという．

(4) $K_{m,n}$ がハミルトングラフであるための必要十分条件を求めよ．ただし, すべての頂点を 1 回ずつ通る閉路が存在するグラフをハミルトングラフという．

問題９． 整数型の関数 `cntsv` は配列 `a` とその要素数を示す整数 `n` の 2 つを引数とし, 与えられた配列 `a` の `n` 個の要素の値を先頭から順に調べていくときの符号が変化した回数（符号変化数）を関数値として返すものであるとする．ただし配列 `a` が値が零の要素を含む場合には, その値が零の要素は飛ばして（省いて）符号の変化の回数を数えるものとする．

たとえば符号変化の回数は, `n` が 6 で配列 `a` の 6 個の要素を順番に並べたものが

0,	0,	0,	0,	0,	0	であれば	0 回	であり,
0,	0,	-5,	0,	0,	0	であれば	0 回	であり,
2,	0,	4,	0,	0,	0	であれば	0 回	であり,
0,	0,	3,	0,	-1,	0	であれば	1 回	であり,
2,	0,	3,	0,	0,	-1	であれば	1 回	であり,
3,	2,	-1,	-2,	4,	3	であれば	2 回	であり,
-7,	0,	0,	3,	-4,	-2	であれば	2 回	であり,
6,	-1,	2,	-2,	4,	3	であれば	4 回	であり,
8,	-1,	2,	-1,	3,	-2	であれば	5 回	である.

以上の仕様を満たす関数 `cntsv` の定義を「プログラミング言語」を用いて記述せよ．ただし, 解答の記述に用いる「プログラミング言語」としては, `C`, `Pascal`, `Java`, `Fortran` のいずれかを用いること．さらにどの言語を用いたかを解答中に明記すること．