کنکوری عزیز ماز

دیگه به نظرم وقتشه که از حال و هوای تابستون در بیاین و یکم درس رو جدی بگیرین!
بریم با هم آزمون رو بررسی کنیم. در حسابان دوازدهم، تابع معکوس، اعمال جبری و انتقال توابع رو بررسی می‌کنیم که مباحث مهمی از تابع هستن. تابع معکوس حداقل یک تست در کنکور داره و انتقال و اعمال جبری می‌تونن به صورت مستقل تست داشته باشن یا با مفاهیم دیگری مثل حد و مشتق ترکیب بشن. پس از اهمیت اون‌ها غافل نشین. دو تست هم از ماتریس‌ها در کنکور داریم. پس حسابی از این درس جذاب و دوست‌داشتنی تست بزنین. از هندسهٔ دهم با اصلی‌ترین موضوع یعنی تالس، تشابه و چندضلعی‌ها مواجهین که تالس و تشابه هر کدوم همواره یک تست و چندضلعی‌ها هم می‌تونن یه تست کنکور رو برای شما تشکیل بدن. پس حواستون به این مباحث باشه و به خوبی روشون کار کنین. از طرفی در گسسته هم با بحث مهم نظریهٔ اعداد سر و کار داریم که سعی کنین تست زیاد بزنین تا با مدل‌های متنوع این بحث هم آشنا بشین.

آرزومند آرزوهایتان...

حسین شفیع‌زاده - رتبهٔ ۱ کنکور ۱۷ و مسئول درس ریاضی آزمون ماز

۱- اگر $A(2,b)$ روی نمودار $y_1=3-2f(4-\frac{x}{2})$ و $A'(a,4)$ روی نمودار $y_2=1+f(\frac{x+4}{a})$ متناظر با یکدیگر باشند، مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) -5 ۲) 5 ۳) -1 ۴) 1

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۱)

نقطه A روی نمودار تابع y_1 است، پس:

$$b=3-2f(4-\frac{2}{2})\Rightarrow b=3-2f(3)\Rightarrow f(3)=\frac{3-b}{2}$$

به همین ترتیب A' روی نمودار تابع y_2 داده شده است. بنابراین:

$$4=1+f(\frac{a+4}{a})\Rightarrow f(1+\frac{4}{a})=3$$

$$1+\frac{4}{a}=3\Rightarrow a=2\,,\ \frac{3-b}{2}=3\Rightarrow b=-3$$

$$\Rightarrow a-b=5$$

نقطهٔ متناظر در تابع $y=f(x)$ با تابع $y=af(bx+c)+d$

هرگاه نقطهٔ $A(x_0,y_0)$ بر روی نمودار تابع $y=f(x)$ باشد، آنگاه نقطهٔ متناظر آن بر روی $y=af(bx+c)+d$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_0-c}{b} & \text{:مختصات } x \text{ متناظر} \\ y=af(x_0)+d & \text{:مختصات } y \text{ متناظر} \end{cases}$$

گروه آموزشی ماز

۲- تابع $y=\frac{1}{x+1}$ را دو واحد به چپ انتقال داده و وارون آن را تابع $y=f(x)$ می‌نامیم. در ادامه تابع $y=\frac{1}{x+1}$ را در مرحله اول وارون کرده و سپس آن را دو واحد به چپ انتقال داده و آن را $g(x)$ می‌نامیم. مقدار $fog(-3)$ چه عددی است؟

۱) $-\frac{8}{3}$ ۲) $-\frac{10}{3}$ ۳) $-\frac{7}{2}$ ۴) $-\frac{5}{2}$

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۱)

$$y=\frac{1}{x+1}\xrightarrow[x\to x+2]{\text{Oa³Wlebl2}}y=\frac{1}{x+3}\xrightarrow{\text{· »rhl}}f(x)=\frac{-3x+1}{x}$$

$$y=\frac{1}{x+1}\xrightarrow{\text{· »rhl}}y=\frac{-x+1}{x}\xrightarrow[x\to x+2]{\text{Oa³Wlebl2}}g(x)=\frac{-(x+2)+1}{x+2}$$

$$g(x)=\frac{-x-1}{x+2}\,,\ f(x)=\frac{-3x+1}{x}$$

$$fog(-3)=f\left(g(-3)\right)=f(-2)=-\frac{7}{2}$$

انتقال تابع

انتقال‌های تابع را می‌توان به دو دسته بخش‌بندی کرد:

- تاثیر بر دامنه تابع
- تاثیر بر برد تابع

(k عددی مثبت فرض شود)

۱) $y=f(x)\pm k$ (تاثیر بر برد)

$y=f(x)+k$: به اندازهٔ k واحد به سمت بالا

$y=f(x)-k$: به اندازهٔ k واحد به سمت پایین

۲) $y=f(x\pm k)$ (تاثیر بر دامنه)

$y=f(x+k)$: به اندازهٔ k واحد به سمت چپ

$y=f(x-k)$: به اندازهٔ k واحد به سمت راست

۳) $y=-f(x)$ (تاثیر بر برد)

نمودار تابع را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.

٤) $y=f(-x)$ (تاثیر بر دامنه)

نمودار تابع را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم.

٥) $y=kf(x)$ (تاثیر بر برد)

$k>1$: انبساط نمودار در راستای محور yها با ضریب k

$0<k<1$: انقباض نمودار در راستای محور yها با ضریب k

٦) $y=f(kx)$ (تاثیر بر دامنه)

$k>1$: انقباض نمودار با ضریب $\frac{1}{k}$ در راستای محور xها

$0<k<1$: انبساط نمودار با ضریب $\frac{1}{k}$ در راستای محور xها

گروه آموزشی ماز

۳- تابع $y=3f(2-\frac{x}{3})$ را نسبت به مبدأ مختصات قرینه کرده و آن را وارون می‌کنیم. ضابطه تابع حاصل کدام است؟

۱) $2f^{-1}(-\frac{x}{2})+6$ ۲) $-2f^{-1}(-\frac{x}{2})-1$ ۳) $3f^{-1}(\frac{x}{2})+1$ ۴) $3f^{-1}(-\frac{x}{3})-6$

پاسخ: گزینه ٤ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۱)

ابتدا تابع را نسبت به مبدأ مختصات قرینه می‌کنیم، یعنی هم‌زمان x و y را منفی می‌کنیم.

$$y=-3f(2+\frac{x}{3})$$

حال آن را وارون می‌کنیم.

$$-\frac{y}{3}=f(2+\frac{x}{3})\Rightarrow 2+\frac{x}{3}=f^{-1}(-\frac{y}{3})$$

$$\frac{x}{3}=f^{-1}(-\frac{y}{3})-2\Rightarrow x=3f^{-1}(-\frac{y}{3})-6$$

پس تابع معکوس برابر است با:

$$y=3f^{-1}(-\frac{x}{3})-6$$

قرینهٔ تابع نسبت به مبدأ مختصات

قرینه تابع $y=f(x)$ نسبت به مبدأ مختصات به صورت $y=-f(-x)$ می‌باشد.

نکته

قرینه تابع $y=f(ax+b)$ نسبت به مبدأ مختصات به صورت $y=-f(-ax+b)$ می‌باشد.

قرینهٔ تابع نسبت به محور xها

قرینه تابع $y=f(x)$ نسبت به محور xها به صورت $y=-f(x)$ می‌باشد.

نکته

قرینه تابع $y=f(ax+b)$ نسبت به محور xها به صورت $y=f(-ax+b)$ می‌باشد.

قرینه تابع نسبت به محور yها

قرینه تابع $y=f(x)$ نسبت به محور yها به صورت $y=f(-x)$ می‌باشد.

نکته

قرینه تابع $y=f(ax+b)$ نسبت به محور xها به صورت $y=-f(ax+b)$ می‌باشد.

قرینه تابع نسبت به خط $y=x$

قرینه تابع نسبت به خط $y=x$ همان وارون تابع $f(x)$ یعنی $f^{-1}(x)$ می‌باشد.

قرینه تابع نسبت به خط $x=k$

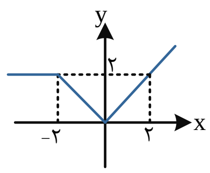
قرینه تابع $y=f(x)$ نسبت به خط $x=k$ به صورت $y=f(2k-x)$ می‌باشد.

نکته

قرینه تابع $y=f(ax+b)$ نسبت به خط $x=k$ به صورت $y=f\big(a(2k-x)+b\big)$ می‌باشد.

گروه آموزشی ماز

۴- نمودار تابع $y=2x+f(x)$ شکل روبه‌رو است. تابع $y=-x-f(x)$ در کدام بازه صعودی اکید است؟

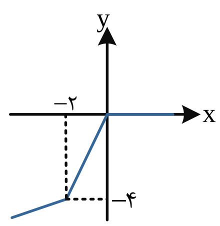


۱) $[0,+\infty)$
۲) $[-2,2]$
۳) $(-\infty,0]$
۴) $[0,2]$

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۱)

$$2x+f(x)=\begin{cases} x & x\ge 0\\ -x & -2\le x\le 0\\ 2 & x\le -2\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} -x & x\ge 0\\ -3x & -2\le x\le 0\\ 2-2x & x\le -2\end{cases}\Rightarrow -x-f(x)=\begin{cases} 0 & x\ge 0\\ 2x & -2\le x\le 0\\ x-2 & x\le -2\end{cases}$$



در بازه $(-\infty,0]$ صعودی اکید است.

گروه آموزشی ماز

۵- سهمی $f(x)=(x-1)^2-4$ داده شده است. اگر نمودار f را یک واحد به چپ انتقال دهیم بر نمودار تابع $y=b+4f(\frac{a-x}{2})$ منطبق خواهد شد، ab کدام است؟

۱) 12　۲) 24　۳) -24　۴) -18

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۱)

اگر f را یک واحد به چپ انتقال دهیم ضابطه جدید $y=x^2-4$ خواهد شد، اما از طرفی:

$$y=b+4(\frac{a-x}{2}-1)^2-16$$

$$y=b+4(\frac{x^2+a^2-2ax}{4}-a+x+1)-16\Rightarrow y=b+(x^2+a^2-2ax-4a+4x+4)-16$$

$$y=b+x^2+(4-2a)x+a^2-4a-12$$

با مقایسه دو تابع داریم:

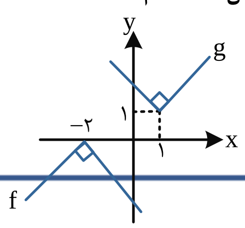
$$a=2\,,\ a^2-4a-12+b=-4$$

$$4-8-12+b=-4\Rightarrow b=12\Rightarrow ab=24$$

گروه آموزشی ماز

۶- توابع رسم شده در شکل مقابل از انتقال و قرینه‌یابی تابع $y=|x|$ به دست آمده‌اند. اگر $g(x)+f(x+a)=b$ باشد، حاصل ab کدام است؟

۱) -3
۲) 3



۳) 6
۴) -6

پاسخ: گزینه ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۱)

اگر نمودار $g(x)$ را ۳ واحد به چپ و یک واحد به پایین انتقال دهیم، قرینه نمودار f نسبت به محور طول‌ها خواهد شد. پس:

$$g(x+3)-1=-f(x)\Rightarrow g(x+3)+f(x)=1$$

حال می‌توانیم به جای x هر عبارت خطی را قرار دهیم، مثلاً به جای x قرار می‌دهیم $x-3$ و داریم:

$$g(x)+f(x-3)=1$$

$$a=-3\,,b=1\Rightarrow ab=-3$$

گروه آموزشی ماز

۷- اگر $f(x)=3x+2\sqrt{x}$ به طوری که $f(2-3\alpha)<f(4\alpha+9)$ باشد، حدود α کدام است؟

۱) $(-1,\frac{2}{3})$ ۲) $(\frac{2}{3},1)$ ۳) $(-1,\frac{2}{3}]$ ۴) $(-\frac{9}{4},-1)$

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۲۰۱)

f تابع صعودی اکید با دامنه $[0,+\infty)$ است، پس:

$$x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

$$\begin{cases}2-3\alpha<4\alpha+9\Rightarrow 7\alpha>-7\Rightarrow \alpha>-1 & (1)\\ 2-3\alpha\ge 0\Rightarrow \alpha\le\frac{2}{3} & (2)\\ 4\alpha+9\ge 0\Rightarrow \alpha\ge-\frac{9}{4} & (3)\end{cases}$$

پس در نهایت:

$$\xrightarrow{(1)\cap(2)\cap(3)}-1<\alpha\le\frac{2}{3}\Rightarrow \alpha\in(-1,\frac{2}{3}]$$

بررسی یکنوایی تابع $y=f(x)$

تابع f را اکیداً صعودی می‌نامیم هرگاه به ازای هر x_1 و x_2 عضو دامنه $y=f(x)$:

$$x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

بررسی ویژگی‌های تابع اکیداً صعودی
۱) یک‌به‌یک است.
۲) وارون‌پذیر می‌باشد.
۳) وارون آن نیز اکیداً صعودی می‌باشد.

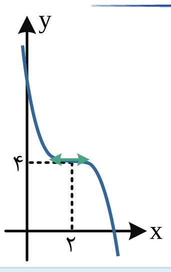
تابع f را اکیداً نزولی می‌نامیم هرگاه به ازای هر x_1 و x_2 عضو دامنه $y=f(x)$:

$$x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$$

بررسی ویژگی‌های تابع اکیداً نزولی
۱) یک‌به‌یک است.
۲) وارون‌پذیر می‌باشد.
۳) وارون آن نیز اکیداً نزولی می‌باشد.

گروه آموزشی ماز

۸- نمودار تابع $f(x)=-x^3+ax^2+bx+c$ شکل مقابل است. مقدار $f^{-1}(c)$ چه عددی است؟



۱) -1
۲) 1
۳) -2
۴) صفر

پاسخ: گزینه ٤ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۱)

با توجه به نمودار داده شده:

$$f(x)=-(x-2)^3+4\Rightarrow f(x)=-(x^3-6x^2+12x-8)+4$$

$$=-x^3+6x^2-12x+12\Rightarrow\begin{cases}a=6\\ b=-12\\ c=12\end{cases}$$

باید $f^{-1}(12)$ را پیدا کنیم، بنابراین:

$$f^{-1}(12)=\alpha \Rightarrow f(\alpha)=12 \Rightarrow \alpha=0$$

پس:

$$f^{-1}(12)=0$$

ابع درجه ۳
ت

برای رسم نمودار تابع $f(x)=a(x-b)^3+c$ از انتقال تابع $y=x^3$ استفاده می‌شود.

ویژگی‌های تابع $y=kx^3$

۱) یک‌به‌یک می‌باشد.
۲) وارون‌پذیر است.
۳) $k>0$: اکیداً صعودی می‌باشد.
$k<0$: اکیداً نزولی می‌باشد.
۴) دامنه و برد آن برابر با ⬚ می‌باشد.

گروه آموزشی ماز

۹- تابع $f(x)=2^x-1$ مفروض است. طول نقاط نمودار f را نصف کرده و نمودار آن را ۲۱ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم. تابع g به دست می‌آید. مجموع ریشه‌های معادلهٔ $g(x)=12f(x)$ کدام است؟

۱) 5 ۲) 12 ۳) 8 ۴) 6

اسخ: گزینه ۱
پ
(آسان ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۱)

طول نقاط را نصف کنیم تابع $f(2x)$ به دست می‌آید و ۲۱ واحد به سمت بالا انتقال دهیم تابع $f(2x)+21$ به دست می‌آید، پس $g(x)=f(2x)+21$ است.

$$f(2x)+21=12f(x) \Rightarrow 2^{2x}-1+21=12(2^x-1)$$

$$2^x=t \Rightarrow t^2+20=12t-12 \Rightarrow t^2-12t+32=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=4 \Rightarrow 2^x=4 \Rightarrow x=2 \\ t=8 \Rightarrow 2^x=8 \Rightarrow x=3 \end{cases} \Rightarrow \text{جمع}=5$$

گروه آموزشی ماز

۱۰- مجموعه جواب نامعادلهٔ $(0/8)^{x-4} \le (\frac{8}{5\sqrt{5}})^{x^2-3}$ به صورت $[\alpha,\beta]$ است. حاصل $\beta-3\alpha$ کدام است؟

۱) -3 ۲) 1 ۳) 2 ۴) صفر

اسخ: گزینه ۳
پ
(آسان ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۱)

دقت کنید که:

$$\begin{cases} 0/8=\frac{4}{5}=(\frac{2}{\sqrt{5}})^2 \\ \frac{8}{5\sqrt{5}}=(\frac{2}{\sqrt{5}})^3 \end{cases}$$

پس:

$$(\frac{2}{\sqrt{5}})^{2x-8} \le (\frac{2}{\sqrt{5}})^{3x^2-9}$$

چون $(\frac{2}{\sqrt{5}})^x$ نزولی است، پس:

$$2x-8 \ge 3x^2-9 \Rightarrow 3x^2-2x-1 \le 0 \Rightarrow -\frac{1}{3} \le x \le 1 \Rightarrow \beta-3\alpha=1+1=2$$

گروه آموزشی ماز

ماز

۱۱- فرض کنید $fog(x)=a-\dfrac{1}{x-2}$ و $f(x)=\dfrac{3x}{x-1}$ باشد، اگر $g(x)$ تابعی خطی باشد، مقدار a کدام است؟

۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) 4

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۲)

فرض کنید $g(x)=t$ باشد، پس:

$$\begin{cases} f(t)=\dfrac{3t}{t-1} \\ fog(x)=f(t)=a-\dfrac{1}{x-2} \end{cases} \Rightarrow \frac{3t}{t-1}=a-\frac{1}{x-2}$$

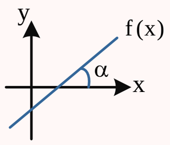
$$\Rightarrow 3xt-6t=(t-1)(ax-2a-1) \Rightarrow 3xt-6t=t(ax-2a-1)-ax+2a+1$$

$$\Rightarrow t(ax-2a-1-3x+6)=ax-2a-1 \Rightarrow t=\frac{ax-2a-1}{(a-3)x-2a+5}$$

به شرطی این تابع خطی است که $a=3$ باشد.

تابع خطی

تابعی که به صورت $f(x)=ax+b$ تعریف شود را تابع خطی می‌نامیم.



۱) شیب خط $=a=\tan\alpha$

۲) محل تلاقی با محور yها (عرض از مبدأ) $(0,b)$

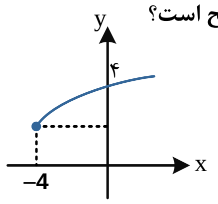
نکته

۱) هرگاه در بحث ترکیب توابع، ضابطهٔ fog و g معلوم باشد، در این حالت از تغییر متغیر $g(x)=t$ کمک می‌گیریم و x را برحسب t پیدا می‌کنیم و در ضابطهٔ $fog(x)$ قرار می‌دهیم.

۲) هرگاه در بحث ترکیب توابع، ضابطهٔ fog و f معلوم باشد، در ضابطهٔ تابع $f(x)$ به جای x، $g(x)$ قرار می‌دهیم تا $f\left(g(x)\right)$ حاصل شود و بعد مساوی fog قرار می‌دهیم تا ضابطهٔ $g(x)$ حاصل شود.

گروه آموزشی ماز

۱۲- نمودار تابع $f(x)=a+\sqrt{x+b}$ به صورت مقابل است. اگر $g(x)=f(3-x)$ باشد، دامنهٔ تابع $gof(x)$ شامل چند عدد صحیح است؟



۱) 25
۲) 26
۳) 12
۴) 13

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ ترکیبی / محاسباتی ـ ۱۱۰۲)

نمودار تابع در بازهٔ $[-4,+\infty)$ رسم شده است، پس $b=4$ است.

$$f(0)=4 \Rightarrow a+\sqrt{b}=4 \xrightarrow{b=4} a=2$$

$$\Rightarrow f(x)=2+\sqrt{x+4}$$

$$g(x)=f(3-x)=2+\sqrt{7-x}$$

$$D_{gof}=\left\{x\in D_f \,\middle|\, f(x)\in D_g\right\}=\left\{x\geq -4 \,\middle|\, 2+\sqrt{x+4}\leq 7\right\}$$

$$=\left\{x\geq -4 \,\middle|\, x\leq 21\right\}=[-4,21]$$

این بازه شامل ۲۶ عدد صحیح است.

بررسی تابع $y=k\sqrt{ax+b}+c$

ویژگی‌ها

۱) یک‌به‌یک می‌باشد.

۲) وارون‌پذیر می‌باشد.

۳) تابع اکیداً یکنوا می‌باشد.

دامنهٔ ترکیب توابع

برای محاسبهٔ دامنهٔ ترکیب توابع داریم:

- $D_{gof}=\{x\in D_f \,|\, f(x)\in D_g\}$
- $D_{fog}=\left\{x\in D_g \,|\, g(x)\in D_f\right\}$

۱۳- اگر $f^{-1}=\{(3,2),(4,-1),(5,-2),(2,3)\}$ و $g(x)=\dfrac{12}{x-1}$ باشد، مجموع اعضای برد تابع gof کدام است؟

۱) 24 ۲) 25 ۳) 26 ۴) 27

پاسخ: گزینه ۲ (آسان ـ ترکیبی ـ ۱۱۰۲)

ابتدا دقت کنید که: $f=\{(2,3),(-1,4),(-2,5),(3,2)\}$

دامنهٔ gof برابر $\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$ است، پس $D_{gof}=\{2,-1,-2,3\}$ است.

$$gof(2)=g(3)=6$$
$$gof(-1)=g(4)=4$$
$$gof(-2)=g(5)=3$$
$$gof(3)=g(2)=12$$
$$\Rightarrow gof=\{(2,6),(-1,4),(-2,3),(3,12)\}$$

$R_{gof}=\{6,4,3,12\} \Rightarrow$ مجموع اعضای برد $=25$

گروه آموزشی ماز

۱۴- نمودار تابع $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+m-1}$ بر وارون خود منطبق است. اگر نمودار تابع $y=f(-\dfrac{2}{x})$ نمودار وارون خود را در نقاطی به طول α و β قطع کند، حاصل $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{5}{4}$ ۲) $\dfrac{4}{3}$ ۳) $\dfrac{3}{5}$ ۴) $\dfrac{4}{5}$

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ ترکیبی / محاسباتی ـ ۱۱۰۲)

به شرطی نمودار $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ بر وارون خود منطبق است که $a=-d$ باشد.

$$2=-(m-1)\Rightarrow m=-1\Rightarrow f(x)=\frac{2x+3}{x-2}$$

$$f(\frac{-2}{x})=\frac{-\frac{4}{x}+3}{-\frac{2}{x}-2}=\frac{3x-4}{-2-2x}$$

حال نمودار $f(\frac{-2}{x})$ را با نیمساز ناحیه اول و سوم $(y=x)$ قطع می‌دهیم. دقت کنید نقاط برخورد تابع $f(-\frac{2}{x})$ با معکوسش فقط روی خط $y=x$ قرار می‌گیرد. پس:

$$\frac{3x-4}{-2-2x}=x\Rightarrow 2x^2+5x-4=0$$

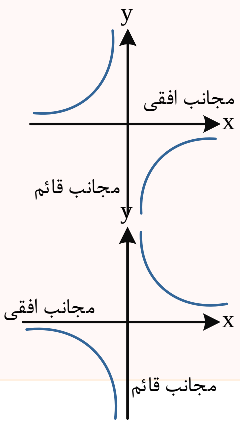
$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{-\frac{5}{2}}{-\frac{4}{2}}=\frac{5}{4}$$

تابع هموگرافیک

تابع $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ با شرط $c\neq 0$ و $\dfrac{a}{c}\neq\dfrac{b}{d}$ را تابع هموگرافیک می‌گوییم، آنگاه:

۱) هرگاه $ad-bc>0$ تابع در ربع دوم و چهارم مجانب‌هایش قرار می‌گیرد.

۲) هرگاه $ad-bc<0$ تابع در ربع اول و سوم مجانب‌هایش قرار می‌گیرد.



۳) $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$ ، $R_f = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{a}{c}\right\}$

۴) یک‌به‌یک می‌باشد.

۵) وارون‌پذیر است: $y=\dfrac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow y^{-1}=\dfrac{-dx+b}{cx-a}$

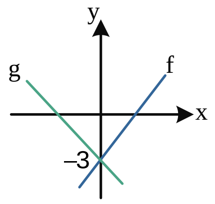
نکته

هرگاه $a+d=0$ باشد، وارون آن بر خودش منطبق است.

$a=-d \Rightarrow f^{-1}(x)=f(x)$

گروه آموزشی ماز

۱۵- نمودار توابع خطی f و g به صورت مقابل است. اگر $f^{-1}og(x)=-3x+g(-1)$ باشد، مقدار $gof^{-1}(4)$ کدام است؟



۱) -18

۲) -24

۳) -15

۴) -12

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط - ترکیبی / محاسباتی - ۱۱۰۲)

فرض کنید $f(x)=ax-3$ و $g(x)=bx-3$ باشد، پس: $f^{-1}(x)=\dfrac{x+3}{a}$

$$\frac{b}{a}x=-3x+g(-1)=-3x-b-3 \Rightarrow \frac{b}{a}x=-3x-b-3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -b-3=0 \Rightarrow b=-3 \\ \dfrac{b}{a}=-3 \xrightarrow{b=-3} a=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x)=x-3 \\ g(x)=-3x-3 \end{cases}$$

$$gof^{-1}(4)=g(7)=-24$$

گروه آموزشی ماز

۱۶- اگر $2^a=9$ و $3a-2=\log_{\sqrt{2}}^{b}$ باشد، حاصل $\log_3^{6b}$ کدام است؟

۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) 4

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط - محاسباتی - ۱۱۰۳)

$$3a-2=\log_{\sqrt{2}}^{b}=2\log_2^b \Rightarrow \log_2^b=\frac{3a-2}{2}$$

$$\Rightarrow b=2^{\frac{3a-2}{2}}=2^{\frac{3a}{2}}\times 2^{-1}=(2^a)^{\frac{3}{2}}\times\frac{1}{2}=(9)^{\frac{3}{2}}\times\frac{1}{2}=\frac{27}{2} \Rightarrow b=\frac{27}{2}$$

$$\Rightarrow 6b=81 \Rightarrow \log_3^{6b}=\log_3^{81}=4$$

ویژگی‌های توابع log $(c\neq 1, a,b,c>0)$

۱) $\log_c^1=0$

۲) $\log_c^c=1$

۳) $\log_c^{ab}=\log_c^a+\log_c^b$

۴) $\log_c^{\frac{a}{b}}=\log_c^a-\log_c^b$

۵) $\log_{c^n}^{a^m}=\dfrac{m}{n}\log_c^a=\log_c^{a^{\frac{m}{n}}}=\log_{c^{\frac{n}{m}}}^{a}$

۶) $\log_b^a=\dfrac{\log_c^a}{\log_c^b}\quad (b\neq 1)$

۷) $\log_c^a=\dfrac{1}{\log_a^c}\quad (a\neq 1)$

۸) $a^{\log_c^b}=b^{\log_c^a}$

گروه آموزشی ماز

۱۷- اگر $x=a$ جواب معادلهٔ $\log_2^{(1-x)} - 2\log_2^{(x-1)^2} = -2$ باشد، حاصل $(a-1)^3$ کدام است؟

۱) 4 ۲) -4 ۳) 8 ۴) -8

پاسخ: گزینه ۲ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۲)

با توجه به دامنه، $1-x$ مثبت است، پس:

$$\log_2^{(1-x)} - 4\log_2^{(1-x)} = -2 \Rightarrow \log_2^{(1-x)} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 1-x = 2^{\frac{2}{3}} \Rightarrow x = a = 1-\sqrt[3]{4} \Rightarrow (a-1)^3 = -4$$

حل معادلات لگاریتمی

۱) $\log_a^{f(x)} = b \xrightarrow[(a>0)]{a\neq 1} f(x) = a^b$

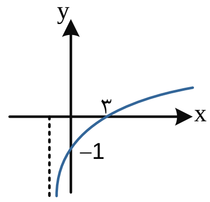
۲) $\log_a^{f(x)} = \log_a^{g(x)} \xrightarrow[a\neq 1]{(a>0)} f(x) = g(x)$

در گام اول برای حل معادلات لگاریتمی باید طرفین را تا جای ممکن ساده کرد، سپس آن را حل می‌کنیم. حواستان باشد:
جواب‌های به دست آمده از حل معادلهٔ لگاریتمی را بایستی در معادلهٔ اولیه بررسی کنید، برای این موضوع باید به دامنهٔ لگاریتمی تسلط داشته باشید:

$$h(x) = \log_{g(x)}^{f(x)} \Rightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \ (1) \\ g(x) > 0 \ (2) \\ g(x) \neq 1 \ (3) \end{cases} \qquad D_h = 1 \cap 2 \cap 3$$

گروه آموزشی ماز

۱۸- شکل مقابل، نمودار تابع $f(x) = -2 + \log_b^{(ax+2b-3)}$ است. حاصل $a-b$ کدام است؟



۱) -1

۲) 1

۳) 3

۴) -3

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۱۰۳)

با توجه به نمودار $f(0) = -1$ و $f(3) = 0$ است. ببینید:

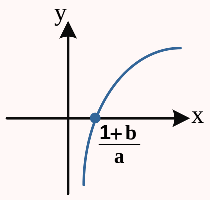
$$f(0) = -1 \Rightarrow -2 + \log_b^{(2b-3)} = -1 \Rightarrow \log_b^{(2b-3)} = 1 \Rightarrow 2b-3 = b \Rightarrow b = 3$$

$$f(3) = 0 \Rightarrow -2 + \log_3^{(3a+3)} = 0 \Rightarrow \log_3^{(3a+3)} = 2 \Rightarrow 3a+3 = 9 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow a-b = -1$$

نمودارهای تابع $y = k\log_c^{(ax-b)}$

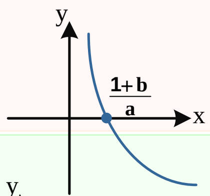
۱) $a, k > 0,\ c > 1$

یک‌به‌یک است.
وارون‌پذیر می‌باشد.
تابع اکیداً صعودی است.



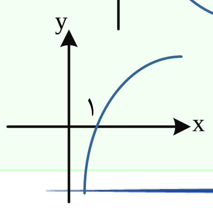
۲) $a, k > 0,\ 0 < c < 1$

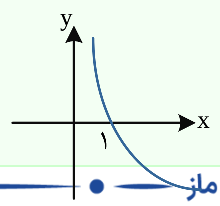
یک‌به‌یک است.
وارون‌پذیر می‌باشد.
تابع اکیداً نزولی است.



نکته

تابع $y = \log_a^x$ همواره از نقطهٔ $(1,0)$ عبور می‌کند.





گروه آموزشی ماز

۱۹- اگر مجموع ریشه‌های معادلهٔ $\log_2^{(n+4^x)} = \log_2^m + x$ برابر ۳ باشد. مقدار n کدام است؟

۱) 8 ۲) 10 ۳) 12 ۴) 6

پاسخ: گزینه ۱   (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۱۰۳)

$$x = \log_2^{(n+4^x)} - \log_2^m = \log_2 \frac{n+4^x}{m} \Rightarrow \frac{n+4^x}{m} = 2^x \Rightarrow 4^x - m2^x + n = 0$$

فرض کنید $2^x = t$، پس $t^2 - mt + n = 0$ و از طرفی، چون $x_1 + x_2 = 3$ ، پس $t_1t_2 = 2^{x_1} \times 2^{x_2} = 2^3 = 8$ و لذا $n = 8$ است.

گروه آموزشی ماز

۲۰- کالایی در پایان هر سال، ۱۲ درصد از ارزش خود را از دست می‌دهد. پس از چند سال ۲۲ درصد از ارزش آن باقی می‌ماند؟
$(\log 2 = 0/301 , \log 11 = 1/041)$

۱) $13/5$ ۲) $10/5$ ۳) $11/75$ ۴) $12/25$

پاسخ: گزینه ۳   (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۱۰۳)

در پایان هر سال، ۸۸ درصد ارزش کالا باقی می‌ماند. بنابراین، پس از n سال، $(0/88)^n$ از ارزش کالا باقی خواهد ماند.

$$(0/88)^n = 0/22 \Rightarrow n = \log_{0/88}^{0/22}$$

$$\Rightarrow n = \frac{\log 0/22}{\log 0/88} = \frac{\log 22 - 2}{\log 88 - 2} = \frac{\log 2 + \log 11 - 2}{3\log 2 + \log 11 - 2}$$

$$= \frac{0/301 + 1/041 - 2}{0/903 + 1/041 - 2} = \frac{2000 - 301 - 1041}{2000 - 903 - 1041} = \frac{658}{56} = 11/75$$

گروه آموزشی ماز

۲۱- ماتریس $A = [a_{ij}]$ یک ماتریس ستونی با ۵ درایه است که $a_{ij} = i - j + 1$ و $B = [b_{ij}]$ یک ماتریس سطری با ۵ درایه است که $b_{ij} = j^i$ است. مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $A \times B$ کدام است؟

۱) 15 ۲) 25 ۳) 45 ۴) 55

پاسخ: ۴   (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۱)

ماتریس A ستونی و درایه‌های آن: a_{11}، a_{21}، a_{31}، a_{41}، a_{51} است.

$$a_{ij} = i - j + 1 \Rightarrow a_{11} = 1 , a_{21} = 2 , a_{31} = 3 , a_{41} = 4 , a_{51} = 5$$

ماتریس B سطری و درایه‌های آن b_{11}، b_{12}، b_{13}، b_{14}، b_{15} است.

$$b_{ij} = j^i \Rightarrow b_{11} = 1 , b_{12} = 2 , b_{13} = 3 , b_{14} = 4 , b_{15} = 5$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}_{5\times 1} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}_{1\times 5} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 25 \end{bmatrix} \Rightarrow$$ Â± Ìd%øÁlÀ¾j “¼ ¶ $= 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$

گروه آموزشی ماز

۲۲- اگر $A = [a_{ij}]_{3\times 2}$ و $B = [b_{ij}]_{2\times 3}$ و $A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، $a_{22}b_{23} + b_{13}a_{21}$ کدام است؟

۱) -1 ۲) $\cup$ ۳) 1 ۴) 2

پاسخ: گزینه ۱   (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۲۰۱)

$a_{22}b_{23} + b_{13}a_{21} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23}$ که برابر است با: $[a_{21} \quad a_{22}] \begin{bmatrix} b_{13} \\ b_{23} \end{bmatrix}$ یعنی درایه‌های سطر دوم ماتریس A را در ستون سوم ماتریس B ضرب کرده‌ایم که حاصل درایه واقع در سطر دوم ستون سوم ماتریس $A \times B$ است یعنی -1.

نکته

اگر $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ و $B=\left[b_{ij}\right]_{n\times k}$ باشد، $A\times B$ ماتریس $C=\left[c_{ij}\right]_{m\times k}$ است که $c_{ij}=\sum_{t=1}^{n}a_{it}b_{tj}$

گروه آموزشی ماز

۲۳- اگر $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&1&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های ستون سوم $A^2B^3C^2$ کدام است؟

۱) 6　　۲) 5　　۳) 20　　۴) 12

پاسخ: گزینه ۲　　(متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۴۰۱)

$$B=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\Rightarrow B^2=\begin{bmatrix}2&2&2\\1&2&1\\1&0&1\end{bmatrix}\Rightarrow B^3=\begin{bmatrix}4&4&4\\3&2&3\\1&2&1\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}\Rightarrow A^2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&1&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\Rightarrow C^2=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&0&0\\0&1&0\\0&0&\frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

$$A^2B^3=\begin{bmatrix}4&4&4\\12&8&12\\4&8&4\end{bmatrix}\Rightarrow A^2B^3C^2=\begin{bmatrix}1&4&1\\3&8&3\\1&8&1\end{bmatrix}\Rightarrow 1+3+1=5$$

نکاتی از ماتریس‌های قطری

۱) اگر A یک ماتریس قطری باشد A^n از به توان n رساندن درایه‌های قطر اصلی A به دست می‌آید.

$$\begin{bmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}a^n&0&0\\0&b^n&0\\0&0&c^n\end{bmatrix}$$

۲)

$$\begin{bmatrix}r_1&0&0\\0&r_2&0\\0&0&r_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r_1a_1&r_1b_1&r_1c_1\\r_2a_2&r_2b_2&r_2c_2\\r_3a_3&r_3b_3&r_3c_3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r_1&0&0\\0&r_2&0\\0&0&r_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r_1a_1&r_2a_2&r_3a_3\\r_1b_1&r_2b_2&r_3b_3\\r_1c_1&r_2c_2&r_3c_3\end{bmatrix}$$

گروه آموزشی ماز

۲۴- اگر $A=\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$ باشد، A^{101} کدام است؟

۱) I　　۲) A　　۳) $-A$　　۴) A^2

پاسخ: گزینه ۲ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۴۰۱)

$$A^2=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\Rightarrow A^3=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow A^4=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=I$$

$$A^{101}=(A^4)^{25}\times A\Rightarrow A^{101}=I\times A=A$$

گروه آموزشی ماز

۲۵- اگر $(A-B)(A+B)=A^2-2AB-B^2$ و $BA^3=kA^3B$ باشد، k کدام است؟

۱) -1 ۲) 2 ۳) -8 ۴) 27

پاسخ: گزینه ٤ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ۱۴۰۱)

$$(A-B)(A+B)=A^2-2AB-B^2\Rightarrow A^2+AB-BA-B^2=A^2-2AB-B^2\Rightarrow 3AB=BA$$

$$BA^3=\underbrace{BA}_{3AB}\times A\times A=3A\times\underbrace{B\times A}_{3AB}\times A=9A\times A\times\underbrace{B\times A}_{3AB}=27A^3B$$

توجه!

ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد، پس اتحادها برای ماتریس‌ها برقرار نیست.

گروه آموزشی ماز

۲۶- اگر k حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی n و n+1 باشد، آن‌گاه کدام گزاره نادرست است؟

۱) $(k+1)^2-1$ بر ۸ بخش‌پذیر است.

۲) k^2 بر ۴ بخش‌پذیر است.

۳) $4k+1$ مجذور یک عدد فرد است.

۴) اگر k^2 بر ۸ بخش‌پذیر باشد، n فرد است.

پاسخ: گزینه ٤ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۴۰۱)

بررسی گزینه‌ها:

۱ با توجه به نکته ۱، k زوج و k+1 فرد است و با توجه به نکته ۲، $(k+1)^2$ به صورت $8t+1$ است، پس $(k+1)^2-1$ بر ۸ بخش‌پذیر است.

۲ طبق نکته ۱، k زوج است و طبق نکته ۵، k^2 بر ۴ بخش‌پذیر است.

۳

$$4k+1=4(n(n+1))+1=4n^2+4n+1=(2n+1)^2$$

۴ مثال نقض: $n=4$ باشد، $k=20$ و $k^2=400$ است که بر ۸ بخش‌پذیر است.

نکته ۱

حاصل‌ضرب هر دو عدد طبیعی متوالی، زوج است.

نکته ۲

مربع هر عدد فرد به صورت $8t+1$ است، یعنی باقی‌مانده تقسیم آن بر ۸ برابر 1 است.

نکته ۳

اگر k حاصل‌ضرب 2 عدد متوالی باشد، $4k+1$ مجذور یک عدد فرد است.

نکته ٤

حاصل‌ضرب دو عدد زوج متوالی بر 8 بخش‌پذیر است.

نکته ٥

اگر m زوج باشد، m^t بر 2^t بخش‌پذیر است.

تمرین

۵ نکته فوق را ثابت کنید.

گروه آموزشی ماز

۲۷- در اثبات نامساوی $2a^2+b^2+c^2 \ge ab+ac$ با برهان خلف با کدام گزاره بدیهی زیر نمی‌توان به تناقض رسید؟

۱) $(a-b)^2+(a-c)^2+2a^2+b^2+c^2 \ge 0$

۲) $(2a-b)^2+(2a-c)^2+3b^2+3c^2 \ge 0$

۳) $(a-2b)^2+(a-2c)^2+6a^2 \ge 0$

۴) $(a-2b)^2+(2a-c)^2+3a^2+3b^2 \ge 0$

اسخ: گزینه ٤
پ
(سخت ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۱)

بررسی گزینه‌ها:

۱ با صورت سوال هم‌ارز است. چون:

$$2a^2+b^2+c^2 \ge ab+ac \Leftrightarrow 4a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2+b^2-2ab)+(a^2+c^2-2ac)+2a^2+b^2+c^2 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2+(a-c)^2+2a^2+b^2+c^2 \ge 0$$

۲ با صورت سوال هم‌ارز است، چون:

$$a^2+b^2-ab+a^2+c^2-ac \ge 0 \Leftrightarrow a^2-ab+\frac{1}{4}b^2+\frac{3}{4}b^2+a^2-ac+\frac{1}{4}c^2+\frac{3}{4}c^2 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a-\frac{1}{2}b)^2+(a-\frac{1}{2}c)^2+\frac{3}{4}b^2+\frac{3}{4}c^2 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (2a-b)^2+(2a-c)^2+3b^2+3c^2 \ge 0$$

۳ با نامساوی صورت سوال هم‌ارز است. چون:

$$a^2+b^2-ab+a^2+c^2-ac \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}a^2+(\frac{1}{4}a^2+b^2-ab)+\frac{3}{4}a^2+(\frac{1}{4}a^2+c^2-ac) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (\frac{1}{2}a-b)^2+(\frac{1}{2}a-c)^2+\frac{3}{2}a^2 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a-2b)^2+(a-2c)^2+6a^2 \ge 0$$

پس در صورت اثبات با برهان خلف با این ۳ گزاره بدیهی به تناقض می‌رسیم.

رهان خلف
ب
در برهان خلف، به جای اثبات مستقیم، عکس نقیض گزاره شرطی که با آن معادل است را ثابت می‌کنیم، یعنی فرض می‌کنیم حکم برقرار نیست و با فرض مسئله یا یک گزاره بدیهی به تناقض می‌رسیم.

گروه آموزشی ماز

۲۸- اگر $a^7 | b^4$، آن‌گاه کدام نتیجه‌گیری درست نیست؟

۱) $a|b$ ۲) $a^3|b^2$ ۳) $a^5|b^3$ ۴) $a^9|b^5$

اسخ: گزینه ٤
پ
(متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۱)

برای حل این سوال، عددگذاری روش خیلی سریعی است. اگر $a=2^4$ و $b=2^7$ باشد، رابطه صورت سوال برقرار است، ولی گزینه ۴ برقرار نیست.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱ $a^7|b^4 \xrightarrow{b^4|b^7} a^7|b^7 \Rightarrow a|b$

۲ $\left.\begin{array}{l} a|b \Rightarrow a^2|b^2 \\ a^7|b^4 \end{array}\right\} \xrightarrow{\times} a^9|b^6 \Rightarrow a^3|b^2$

۳ $a^7|b^4 \Rightarrow a^{14}|b^8$ ، $a|b$ $\xrightarrow{\times} a^{15}|b^9 \Rightarrow a^5|b^3$

کته ۱
ن

اگر $m \le n$ ، آن‌گاه: $a^m|a^n$

کته ۲
ن

اگر $a^m|b^n$ و $\frac{k}{t} \le \frac{n}{m}$ ، آن‌گاه: $a^t|b^k$.

گروه آموزشی ماز

۲۹- اگر $2n^3+3n^2+n|a+4$ باقی‌مانده تقسیم $(a+1)^2$ بر ۱۸ کدام است؟

۱) 3　　۲) 6　　۳) 9　　۴) 12

اسخ: گزینه ۳
پ
(متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۱)

اگر $n=1$ قرار دهیم $6|a+4$ یعنی $a+4=6k$ ، در نتیجه $a=6k-4$ ، پس $(a+1)^2=36k^2-36k+9$ یعنی $a^2=18(2k^2-2k)+9$ ، پس باقی‌مانده a^2 بر ۱۸ برابر با ۹ است.

خش‌پذیری بر ۶
ب

$n(n+1)(n+2)$ بر 6 بخش‌پذیر است.

نتیجه: $n(n+1)(2n+1)$ بر 6 بخش‌پذیر است.

ألیفی
ت

اگر $2n^3+3n^2+n|a+4$ باقی‌مانده تقسیم a^2 بر 12 کدام است؟

۱) 2　　۲) 6　　۳) 4　　٤) 8

گروه آموزشی ماز

۳۰- به ازای چند عدد دو رقمی a بزرگتر از ۳۳، اعداد $4a+3$ و $6a+2$ نسبت به هم اول نیستند؟

۱) 11　　۲) 13　　۳) 37　　۴) 66

اسخ: گزینه ۲
پ
(متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۱)

$$(4a+3,6a+2)=d \Rightarrow \begin{cases} d|6a+2 \xrightarrow{\times 2} d|12a+4 \\ d|4a+3 \xrightarrow{\times 3} d|12a+9 \end{cases} \xrightarrow{-} d|5 \Rightarrow d=1 \text{ یا } d=5$$

اگر دو عدد نسبت به هم اول نباشند $d=5$ است و داریم:

$$\begin{cases} 5|6a+2 \\ 5|5a \end{cases} \xrightarrow{-} 5|a+2 \Rightarrow a=5k-2$$

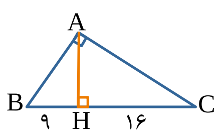
برای اینکه $33<a<100$ باشد، باید $7<k\le 20$ باشد، یعنی ۱۳ مقدار برای k و در نتیجه برای a وجود دارد.

ول بودن دو عدد نسبت به هم
ا

دو عدد نسبت به هم اولند؛ یعنی ب.م.م آن‌ها برابر با یک است. اگر ب.م.م a و b برابر با d باشد، d بزرگ‌ترین عددی است که $d|a$ و $d|b$.

گروه آموزشی ماز

۳۱- در شکل مقابل، ABC در رأس A قائم‌الزاویه و AH ارتفاع وارد بر وتر است. اگر $BH=9$ و $CH=16$ باشند، نسبت تشابه دو مثلث ABH و ACH کدام است؟



۱) $\frac{3}{4}$　　۲) $\frac{4}{7}$

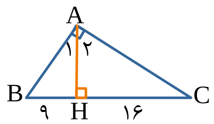
۳) $\frac{9}{16}$　　۴) دو مثلث متشابه نیستند.

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۲)

چون $\hat{C}$ و $\hat{A}_1$ هر دو متمم $\hat{A}_2$ هستند، با هم برابرند و دو مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\triangle}{AHC}$ و $\overset{\triangle}{AHB}$ متشابه‌اند و داریم:

$$AH^2 = HB \times HC \Rightarrow AH^2 = 9 \times 16 \Rightarrow AH = 12$$

$$\hat{C} = \hat{A}_1 \Rightarrow \text{نسبت تشابه} = \frac{BH}{AH} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

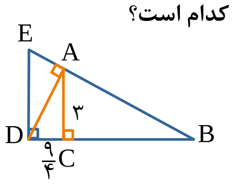


تشابه دو مثلث

دو مثلث قائم‌الزاویه که یک زاویه حاده برابر داشته باشند، متشابه‌اند.

گروه آموزشی ماز

۳۲- مثلث‌های $\overset{\triangle}{ABC}$، $\overset{\triangle}{ADB}$ و $\overset{\triangle}{EDB}$ به ترتیب در رأس‌های A، C و D قائم‌الزاویه‌اند. اگر $AC = 3$ و $CD = \frac{9}{4}$ باشد، ED کدام است؟



۱) $\frac{75}{16}$ ۲) $\frac{65}{12}$

۳) $\frac{45}{11}$ ۴) $\frac{25}{6}$

پاسخ: گزینه ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۲)

در مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\triangle}{ACB}$ داریم:

$$AC^2 = DC \times CB \Rightarrow 9 = \frac{9}{4} \times BC \Rightarrow BC = 4$$

AC و ED هر دو بر BD عمودند، پس با هم موازیند و داریم:

$$\frac{BC}{BD} = \frac{AC}{DE} \Rightarrow \frac{4}{\frac{25}{4}} = \frac{3}{DE} \Rightarrow DE = \frac{75}{16}$$

روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه

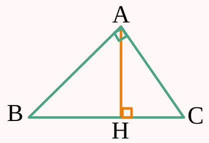
روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ روبه‌رو عبارتند از:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$AH^2 = BH \times CH$$

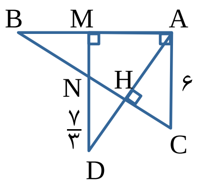
$$AC^2 = CH \times BC$$

$$AB^2 = BH \times BC$$



گروه آموزشی ماز

۳۳- در مثلث قائم‌الزاویهٔ $\overset{\triangle}{ABC}$ که $\hat{A} = 90°$ است. امتداد ارتفاع AH و عمودمنصف ضلع AB یکدیگر را در D قطع می‌کنند. اگر $AC = 6$ و $ND = \frac{7}{3}$ باشد، NH کدام است؟



۱) $1/4$

۲) $2/8$

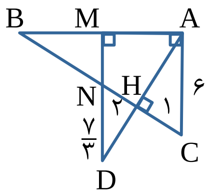
۳) $3/6$

۴) $4/2$

پاسخ: گزینه ۱ (سخت ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۲)

در شکل داده شده $\hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90°$ و (طبق قضیه موازی مورب) $N\hat{D}H = H\hat{A}C$ است و $\overset{\triangle}{ACH}$ و $\overset{\triangle}{HDN}$ متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{AC}{ND} = \frac{HC}{HN} \Rightarrow \frac{6}{\frac{7}{3}} = \frac{HC}{HN} \Rightarrow HC = \frac{18NH}{7}$$



از طرفی، M وسط AB است و $MN \parallel AC$، پس مثلث‌های $\overset{\triangle}{BMN}$ و $\overset{\triangle}{BAC}$ متشابه با نسبت تشابه $\frac{1}{2}$ هستند، پس $MN = 3$ و $BN = NC$.

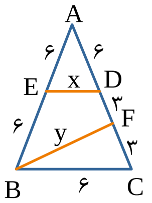
از سوی دیگر، $B\hat{N}M$ و $A\hat{C}H$ هر دو متمم زاویه $\hat{B}$ هستند، پس با هم برابرند. در نتیجه مثلث‌های قائم‌الزاویه $\overset{\triangle}{ACH}$ و $\overset{\triangle}{BMN}$ متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{BN}{AC}=\frac{MN}{HC}\Rightarrow\frac{BN}{6}=\frac{3}{HC}\Rightarrow BN.HC=18\xrightarrow{BN=NH+HC}(NH+HC).HC=18$$

$$\Rightarrow (NH+\frac{18}{7}NH).\frac{18}{7}NH=18\Rightarrow\frac{25}{49}NH^2=1\Rightarrow NH=\frac{7}{5}=1/4$$

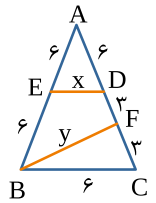
گروه آموزشی ماز

۳۴- در شکل مقابل، $x+y$ کدام است؟



۱) 12
۲) 6
۳) 7
۴) 9

پاسخ: گزینه ٤ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۲)



مثلث‌های $\overset{\triangle}{BFC}$ و $\overset{\triangle}{ABC}$ متشابه‌اند، چون $\hat{C}$ مشترک و $\frac{1}{2}=\frac{CB}{AC}=\frac{CF}{CB}$، پس $\frac{BF}{AB}=\frac{1}{2}$، در نتیجه $y=6$ است.

مثلث‌های $\overset{\triangle}{ADE}$ و $\overset{\triangle}{ABC}$ متشابه‌اند، چون $\hat{A}$ مشترک و $\frac{1}{2}=\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$، پس $\frac{ED}{BC}=\frac{1}{2}$، در نتیجه $x=3$ است.

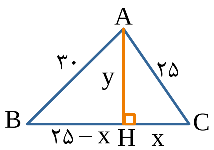
$x+y=3+6=9$

گروه آموزشی ماز

۳۵- اضلاع مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$، $AB=30$، $BC=AC=25$ است، اگر AH ارتفاع این مثلث باشد، نسبت مساحت $\overset{\triangle}{ACH}$ به $\overset{\triangle}{ABH}$ کدام است؟

۱) $\frac{11}{14}$ ۲) $\frac{5}{6}$ ۳) $\frac{25}{36}$ ۴) $\frac{7}{18}$

پاسخ: گزینه ٤ (متوسط ـ محاسباتی ـ۱۰۰۲)



در مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\triangle}{AHB}$ داریم: $900=y^2+(25-x)^2\ (I)$

در مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\triangle}{AHC}$ داریم: $625=y^2+x^2\ (II)$

اگر این دو رابطه را از هم کم کنیم، داریم:

$$(I)-(II)=275=(25-x)^2-x^2\Rightarrow 275=25\times(25-2x)\Rightarrow 25-2x=11\Rightarrow x=7$$

$$\Rightarrow 25-x=18$$

چون ارتفاع دو مثلث برابر است، نسبت مساحت‌ها برابر با نسبت قاعده‌ها است، پس جواب $\frac{7}{18}$ می‌باشد.

الیفی

اضلاع مثلثی 15,14,13 است. ارتفاع وارد بر ضلع به طول 14 کدام است؟

۱) 11 ۲) $\boxed{12}$ ۳) 13/5 ٤) 14/5

گروه آموزشی ماز

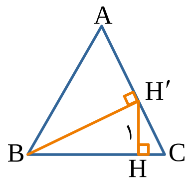
۳۶- $\overset{\triangle}{ABC}$ مثلثی متساوی‌الساقین که $AB=AC$ و $\hat{A}=30^\circ$ است، اگر BH' ارتفاع وارد بر ساق، H روی ضلع BC، HH' به طول ۱ و بر BC عمود باشد، اندازه BH کدام است؟

۱) 3 ۲) 4 ۳) $2+\sqrt{3}$ ۴) $3+\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۳)

در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ می‌دانیم $A = 30^\circ$ است، پس: $\hat{C} = \hat{B} = 75^\circ$، پس مثلث $BH'C$ قائم‌الزاویه و زاویهٔ $H'BC = 15^\circ$ است،

پس $HH' = \frac{1}{4}BC$ یعنی $BC = 4$ است.



$$HH' = BH.HC \Rightarrow 1 = x(4-x) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2+\sqrt{3} \\ x_2 = 2-\sqrt{3} \end{cases}$$

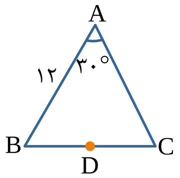
در نتیجه $BH = 2+\sqrt{3}$ و $CH = 2-\sqrt{3}$

ه نکته وتری
ی

در هر مثلث قائم‌الزاویه که یک زاویه حاده آن 15° باشد، ارتفاع وارد بر وتر $\frac{1}{4}$ وتر است.

گروه آموزشی ماز

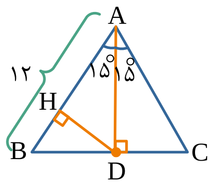
۳۷- مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ متساوی‌الساقین و طول هر ساق آن برابر ۱۲ سانتی‌متر است. اگر نقطه D وسط قاعده BC باشد، فاصله D از ساق AB کدام است؟



۱) 2
۲) 3
۳) 4
۴) 6

پاسخ: گزینه ۲ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۳)

در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ میانه AD نیمساز زاویه A و ارتفاع وارد بر BC نیز هست، پس مثلث $\overset{\triangle}{ADB}$ قائم‌الزاویه و $B\hat{A}D = 15^\circ$ است، پس DH ارتفاع وارد بر وتر AB و اندازهٔ آن برابر با $\frac{1}{4}AB$ است. یعنی: $DH = 3$

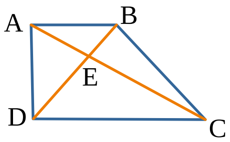


ت وجه!

حواستون بود توی این سوال هم از نکتهٔ سوال قبل استفاده شده بود؟ پس خوب یادش بگیرید 😁

گروه آموزشی ماز

۳۸- شکل مقابل، یک ذوزنقه قائم‌الزاویه است. اگر مثلث $\overset{\triangle}{ABD}$ متساوی‌الساقین و $BD = BC$ باشد، مساحت $\overset{\triangle}{DEC}$ چند برابر $\overset{\triangle}{ABE}$ است؟



۱) 4
۲) 3
۳) 2/5
۴) 2

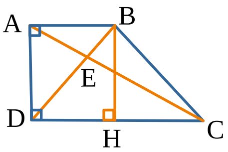
پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۲)

$\overset{\triangle}{ABD}$ متساوی‌الساقین $\Rightarrow AB = AD \xrightarrow{\hat{A}=\hat{D}=\hat{H}=90^\circ}$ ABHD مربع (۱)

$DH = HC$ (2)

$(1), (2) \Rightarrow DC = 2AB$

از طرفی، $BD = BC$، پس:



مثلث‌های $\overset{\triangle}{AEB}$ و $\overset{\triangle}{EDC}$ متشابه‌اند و نسبت تشابه برابر است با: $\frac{AB}{DC} = \frac{1}{2}$

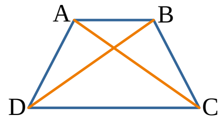
پس نسبت مساحت‌های آن‌ها ۱ به ۴ است.

سبت مساحت چندضلعی‌ها
ن

نسبت مساحت 2 چندضلعی متشابه مربع نسبت تشابه آن‌ها است.

گروه آموزشی ماز

۳۹- در ذوزنقه متساوی‌الساقین ABCD ، قطر AC نیمساز زاویه C است و قطر BD بر ضلع BC عمود است. ارتفاع وارد بر قاعده بزرگ چند برابر قاعده کوچک است؟



۱) 1

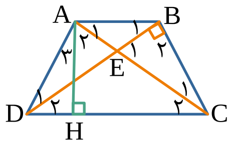
۲) $\frac{1}{2}$

۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۳)

می‌دانیم $\hat{B}_1=\hat{A}_1$ و $\hat{A}_1=\hat{C}_2$ و $\hat{C}_1=\hat{C}_2$، در نتیجه: $\hat{C}_1=\hat{C}_2=\hat{B}_1$، از طرفی $\hat{C}_1+\hat{C}_2+\hat{B}_1+\hat{B}_2=180^\circ$، پس: $\hat{C}_1=\hat{C}_2=\hat{B}_1=30^\circ$, $\hat{E}_1=60^\circ$.



در مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\triangle}{BDC}$ زاویه $\hat{D}_2=30^\circ$، پس: $BC=\frac{1}{2}DC$ (1)

در مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\triangle}{ADH}$ زاویه $A_3=30^\circ$، پس: $DH=\frac{1}{2}AD$ (2)

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $DH=\frac{1}{4}DC$ و $AB=\frac{1}{2}DC$. پس $AD=AB$ و $DH=\frac{1}{2}AB$ است.

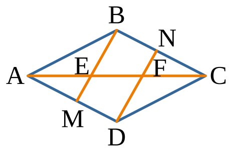
$$AH=AD^2-DH^2\Rightarrow AH^2=AB^2-\frac{1}{4}AB^2\Rightarrow AH=\frac{\sqrt{3}}{2}AB$$

ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین

در ذوزنقه متساوی‌الساقین، قطرها با هم برابرند و زاویه هر قاعده با دو ساق برابر است و زاویه‌های هر ساق با دو قاعده مکمل‌اند.

گروه آموزشی ماز

۴۰- ABCD یک لوزی به ضلع $2\sqrt{3}$ است که در آن $A\hat{B}C=120^\circ$ است. اگر M و N به ترتیب وسط اضلاع AD و BC باشد، اندازه EF کدام است؟



۱) 2

۲) 3

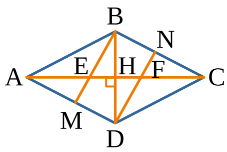
۳) 1

۴) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۳)

با توجه به اینکه در لوزی، قطرها نیمساز زاویه‌ها هستند، مثلث‌های $\overset{\triangle}{BCD}$ و $\overset{\triangle}{ABD}$ متساوی‌الاضلاع و قطر AC دو برابر ارتفاع این مثلث‌ها هستند، پس:

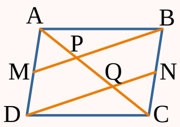
$$CH=\frac{\sqrt{3}}{2}BC\Rightarrow CH=\frac{\sqrt{3}}{2}\times2\sqrt{3}=3\Rightarrow AC=6$$



اما طبق درسنامه $AE=EF=FC$، پس: $EF=\frac{1}{3}AC=2$

متوازی‌الاضلاع

در متوازی‌الاضلاع ABCD، اگر M و N وسط AD و BC باشند، داریم:



۱) $BM \parallel DN$

۲) $AP=PQ=QC$

گروه آموزشی ماز