Calcolo delle Probabilità. Esonero parziale (29/11/05)
Tempo a disposizione: 1 ora e 30 min.

ESERCIZIO 1
Si consideri il seguente gioco a premi: da un mazzo di 40 carte (es. mazzo di carte per giocare a briscola) si estraggono 3 carte a caso senza rimpiazzo. Si vincono 2 euro se le carte estratte hanno tutte lo stesso seme mentre si vince 1 euro se le carte estratte hanno tutte seme diverso l'una dall'altra.
Determinare:
1) la probabilità di vincere 1 euro giocando una volta,
2) la probabilità di vincere 2 euro giocando una volta,
3) la probabilità di non vincere nulla giocando una volta,
4) la probabilità di vincere complessivamente 3 euro giocando 4 volte lo stesso gioco (ogni volta estraendo a caso 3 carte da un mazzo di 40 carte).

ESERCIZIO 2
Vi sono due urne: l'urna A contenente 4 palline bianche, 2 palline rosse e 2 palline gialle e l'urna B contenente 3 palline bianche, 3 palline rosse e 3 palline gialle.
Si consideri il seguente esperimento: viene lanciato un dado (non truccato). Se si ottiene uno dei numeri 1,2,3,4, allora si estraggono 2 palline senza rimpiazzo dall'urna A altrimenti si estraggono 2 palline senza rimpiazzo dall'urna B.
Determinare:
1) la probabilità di estrarre 2 palline bianche,
2) la probabilità che il lancio del dado abbia dato 5 o 6 condizionata al fatto che sono state estratte 1 pallina rossa e 1 gialla,
3) la probabilità che il lancio del dado abbia dato 6 condizionata al fatto che sono state estratte 1 pallina rossa e 1 gialla.

ESERCIZIO 3
Supporre che per volare da Roma a Berlino vi siano le seguenti tre possibilità:
a) si vola direttamente da Roma a Berlino con la compagnia Air Berlin,
b) si vola direttamente da Roma a Berlino con la compagnia Easy Jet,
c) si vola con l'Alitalia prima da Roma a Milano, a Milano si cambia aereo e si vola sempre con l'Alitalia da Milano a Berlino (in questo secondo caso si fanno due voli distinti).
A causa di uno sciopero europeo dei dipendenti delle compagnie aeree alcuni voli vengono cancellati. Supporre che la probabilità che un dato volo venga cancellato sia pari a 2/3 e che la cancellazione di un singolo volo sia indipendente dalla cancellazione o meno degli altri voli.
Determinare la probabilità che nella giornata di sciopero sia possibile raggiungere in aereo Berlino partendo da Roma.

NOTA: non è consentito l'utilizzo di testi o appunti. Non è consentito l'utilizzo della calcolatrice. Nel calcolo delle probabilità è **sufficiente** indicare un'espressione computabile (cioè è sufficiente esprimere la probabilità in termini di frazioni, coefficienti binomiali, fattoriali...).

1

Calcolo delle probabilità - Esonero parziale 29/11/05
TRACCIA DELLE SOLUZIONI

ESERCIZIO 1 Prendiamo come spazio campionario $S = \{\, \{x_1, x_2, x_3\} \;:\; x_i \text{ distinti } x_i \in M\}$, dove M è il mazzo. S ha esiti equiprobabili.

1) $P(E_1) = \frac{\binom{4}{3}10^3}{\binom{40}{3}} = \frac{100}{13\cdot 19} = \frac{100}{247}$.

2) $P(E_2) = \frac{4\binom{10}{3}}{\binom{40}{3}} = \frac{12}{13\cdot 19} = \frac{12}{247}$.

3) $P(E_3) = 1 - P(E_1) - P(E_2) = \frac{247-112}{247} = \frac{135}{247}$.

4) Vincere 3 euro in 4 giocate significa che ho vinto 3 volte 1 euro e una volta non ho vinto nulla, oppure ho vinto una volta 2 euro, una volta 1 euro e 2 volte non ho vinto nulla. Quindi

$$P(E_4) = \binom{4}{3}\left(\frac{12}{247}\right)^3 \frac{135}{247} + 4\cdot 3\frac{12}{247}\frac{100}{247}\left(\frac{135}{247}\right)^2 .$$

ESERCIZIO 2

1) Consideriamo gli eventi
E_1=" esce 1,2,3,4", E_2 ="esce 5 o 6 ", E="estraggo 2 palline bianche".
$P(E) = P(E|E_1)P(E_1) + P(E|E_2)P(E_2) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{8}{2}}\frac{2}{3} + \frac{\binom{3}{2}}{\binom{9}{2}}\frac{1}{3} = \frac{43}{252}$.

2) Sia F l'evento F="estraggo 1 pallina rossa e 1 pallina gialla". Allora

$$P(E_2|F) = \frac{P(F|E_2)P(E_2)}{P(F|E_1)P(E_1) + P(F|E_2)P(E_2)} = \frac{\frac{3\cdot 3}{\binom{9}{2}}\frac{1}{3}}{\frac{3\cdot 3}{\binom{9}{2}}\frac{1}{3} + \frac{2\cdot 2}{\binom{8}{2}}\frac{2}{3}} = \frac{7}{15}$$

3) Siano G_1="esce 5", G_2="esce 6". Per simmetria $P(G_1|F) = P(G_2|F)$. Essendo $P(\cdot|F)$ una funzione di probabilità, abbiamo

$$P(G_1|F) + P(G_2|F) = P(G_1 \cup G_2|F) = P(E_2|F) = 7/15.$$

Combinando i precedenti risultati otteniamo che $P(G_2|F) = 7/30$.

ESERCIZIO 3

P(volo)=1-P(non volo)= 1-P(Air Berlin cancellato, Easy Jet cancellato, Alitalia cancellato)= 1-P(Air Berlin cancellato) P(Easy Jet cancellato) P(Alitalia cancellato)= $1 - \frac{2}{3}\frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{2}{3}\frac{2}{3}\frac{8}{9} = 1 - \frac{32}{81} = \frac{49}{81}$.

Lo stesso esercizio può essere risolto applicando il principio di inclusione-esclusione. A tal fine definiamo:
E_1="posso volare con Air Berlin", E_2="posso volare con Easy Jet", E_3="posso volare con Alitalia". Allora
P(volo)=$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_1 \cap E_2) - P(E_1 \cap E_3) - P(E_2 \cap E_3) + P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{9} - \frac{1}{27} - \frac{1}{27} + \frac{1}{3}\frac{1}{3}\frac{1}{9} = \frac{49}{81}$.

Calcolo delle Probabilità. Esonero parziale (20/12/05)
Tempo a disposizione: 1 ora e 30 min.

ESERCIZIO 1
Si consideri il seguente gioco a premi. Vi sono due mazzi di carte da gioco: un mazzo da 40 e un mazzo da 52. Si lancia una moneta truccata per cui la probabilità di ottenere testa è 1/4. Se il lancio della moneta dà testa allora si estraggono senza rimpiazzo 4 carte dal mazzo da 40, altrimenti si estraggono senza rimpiazzo 4 carte dal mazzo da 52. Si vincono 1000 euro se le 4 carte sono tutte degli assi o hanno tutte lo stesso seme.
1) Determinare la vincita media.
2) Si ripete il gioco in modo indipendente fino al verificarsi di una vincita. Chiamato T il numero di giocate effettuate (includendo nel conteggio di T la giocata vincente) determinare $E(T)$, $Var(T)$ e $E(T^2)$.
Nota: è sufficiente indicare le soluzioni dei punti 1) e 2) in termini di espressioni algebriche eventualmente contenenti fattoriali e coefficienti binomiali

ESERCIZIO 2
1) Dire se esistono variabili aleatorie X e Y, con X a valori in $\{0,2\}$ e Y a valori in $\{-1,0,1\}$, la cui densità congiunta è rappresentata dalle entrate della seguente tabella:

$X \backslash Y$	-1	0	1
0	1/6	1/6	0
2	1/3	1/6	1/6

(cioè $p_{(X,Y)}(0,-1) = 1/6$, $p_{(X,Y)}(0,0) = 1/6$, $p_{(X,Y)}(0,1) = 0$,...).
2) In caso affermativo determinare la densità discreta di X e di Y, la funzione di distribuzione di X e calcolare $E(10X + 3Y)$, $E(XY)$ e $Var(X)$ (*dare il risultato esplicito come numero frazionario svolgendo i calcoli*). Dire inoltre se X e Y sono variabili aleatorie indipendenti.

ESERCIZIO 3 *(I dati di questo esercizio sono di pura fantasia e non molto realistici)*
La Banca Intesa ha nella città di Udine 3 sportelli Bancomat. Tipicamente, in un dato giorno il numero X_i di volte in cui lo sportello Bancomat i–esimo viene utilizzato è dato da una variabile di Poisson di parametro λ_i, con $\lambda_1 = 100$, $\lambda_2 = 50$, $\lambda_3 = 20$. X_1, X_2 e X_3 sono indipendenti. Chiamiamo X il numero totale di utilizzi in un dato giorno degli sportelli Bancomat della Banca Intesa nella città di Udine.
1) Determinare il valor medio e la varianza di X(*dare il risultato esplicito*).
2) Qual è la densità discreta di X?
3) Assumendo che in un dato giorno ogni sportello Bancomat sia non funzionante per motivi tecnici con probabilità 0.01 e che il verificarsi di problemi tecnici in un singolo sportello sia indipendente dallo stato degli altri sportelli, determinare il numero medio di sportelli Bancomat della Banca Intesa funzionanti in un dato giorno nella città di Udine (*dare il risultato esplicito*).

FORMULARIO
Se X è v.a. binomiale di parametri n, p, allora $\mathbb{E}(X) = np$, $Var(X) = np(1-p)$.
Se X è v.a. geometrica di parametro p, allora $\mathbb{E}(X) = 1/p$, $Var(X) = (1-p)/p^2$.
Se X è v.a. di Poisson con parametro λ, allora $\mathbb{E}(X) = \lambda$, $Var(X) = \lambda$.
Se X è v.a. ipergeometrica di parametri n, N, m (tipo: estraggo senza rimpiazzo n palline da un'urna con m palline bianche e $N-m$ palline nere e X è il numero di palline bianche estratte) allora $\mathbb{E}(X) = nm/N$ e $Var(X) = \frac{N-n}{N-1}np(1-p)$ dove $p = m/N$.

3

Calcolo delle Probabilità. Esonero parziale (20/12/05)
Soluzioni (tracce)

ESERCIZIO 1
Chiamo X la vincita. X ha valori in $\{0, 1000\}$.
1) $E(X) = 1000P(X = 1000)$. Per calcolare $P(X = 1000)$ si può procedere nel seguente modo. Sia E l'evento "esce testa". Allora

$$P(X = 1000) = P(X = 1000|E)P(E) + P(X = 1000|E^c)P(E^c)$$
$$= \frac{1 + 4\binom{10}{4}}{\binom{40}{4}}\frac{1}{4} + \frac{1 + 4\binom{13}{4}}{\binom{52}{4}}\frac{3}{4}$$

2) T è v.a. geometrica di parametro $p = P(X = 1000)$. Quindi $E(T) = 1/p$ e $Var(T) = 1/p^2 - 1/p$. Allora $E(T^2) = Var(T) + E(T)^2 = 2/p^2 - 1/p$.

ESERCIZIO 2
1) X, Y esistono poicheè la tabella ha entrate non negative con somma totale pari a 1,
2)

$$p_X(x) = \begin{cases} 1/3 & \text{se } x = 0, \\ 2/3 & \text{se } x = 2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$p_Y(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{se } x = -1, \\ 1/3 & \text{se } x = 0, \\ 1/6 & \text{se } x = 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ 1/3 & \text{se } 0 \leqslant x < 2 \\ 1 & \text{se } x \geqslant 2. \end{cases}$$

Dato che $E(X) = 4/3$ e $E(Y) = -1/3$, $E(10X + 3Y) = 10E(X) + 3E(Y) = 37/3$.
XY assume valori $0, -2, 2$. Quindi

$$E(XY) = -2P(XY = -2) + 2P(XY = 2) = -2P(X = 2, Y = -1) + 2P(X = 2, Y = 1) = -1/3$$

$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 8/3 - (4/3)^2 = 8/9$.
X, Y non sono indipendenti, infatti

$$1/6 = p_{(X,Y)}(0,0) \neq p_X(0)p_y(0) = 1/9$$

ESERCIZIO 3

$X = X_1 + X_2 + X_3$
1) $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) + \mathbb{E}(X_3) = 100 + 50 + 20 = 170$. Essendo X_1, X_2, X_3 indipendenti $Var(X) = Var(X_1) + Var(X_2) + Var(X_3) = 100 + 50 + 20 = 170$. Il punto 1) puo' anche essere risolto osservando che X e' v.a. di Poisson con parametro $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$.
2) X e' v.a. di Poisson con parametro $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$. Infatti abbiamo visto a lezione che la somma di due v.a. di Poisson indipendenti di parametro μ e ν è v.a. di Poisson di parametro $\mu + \nu$. Quindi $X_1 + X_2$ è v.a. di Poisson di parametro $\lambda_1 + \lambda_2$. $X_1 + X_2$ e X_3

4

sono indipendenti quindi $X = (X_1 + X_2) + X_3$ è v.a. di Poisson di parametro $(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_3$. In particolare,

$$p_X(x) = \begin{cases} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} & \text{se } x = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

3) Sia N il numero di sportelli di Banca Intesa funzionanti in un dato giorno nella città di Udine. Allora N è v.a. binomiale di parametri $n = 3, p = 0,99$. Quindi $\mathbb{E}(N) = 3 \cdot 0,99 = 2,97$.

Calcolo delle Probabilità. Esame scritto (17/01/06)
Tempo a disposizione: 2 ore e 30 min.

ESERCIZIO 1
In una partita a bridge il mazzo di 52 carte da gioco viene suddiviso tra 4 giocatori (qui chimati G_1, G_2, G_3, G_4) dando 13 carte a caso a ciascun giocatore. Determinare la probabilità dei seguenti eventi:
1) G_1 riceve 3 assi,
2) almeno un giocatore riceve 3 assi,
3) Nessun giocatore riceve 3 assi.
Nota: è sufficiente indicare le soluzioni in termini di espressioni algebriche eventualmente contenenti fattoriali e coefficienti binomiali

ESERCIZIO 2
Considerare le variabili aleatorie X e Y, con X a valori in $\{0,1,2\}$ e Y a valori in $\{-1,0,1\}$, la cui densità congiunta è rappresentata dalle entrate della seguente tabella:

$X \backslash Y$	-1	0	1
0	1/9	0	1/9
1	2/9	1/9	3/9
2	0	1/9	0

(cioè $p_{(X,Y)}(0,-1) = 1/9$, $p_{(X,Y)}(0,0) = 0$, $p_{(X,Y)}(0,1) = 1/9$,...).
Determinare la densità discreta di X e di Y, la funzione di distribuzione di X e calcolare $E(10X - 2Y)$, $E(XY)$ e $Var(X)$, $Var(3X)$, $Cov(X,Y)$ (*dare il risultato esplicito come numero frazionario svolgendo i calcoli*). Dire inoltre se X e Y sono variabili aleatorie indipendenti.

ESERCIZIO 3 *(I dati di questo esercizio sono di pura fantasia e non molto realistici)*
Due turisti spagnoli in vacanza a Roma decidono di andare a mangiare una pizza e un gelato. Indecisi se andare a Trastevere o a San Lorenzo, lanciano una moneta: se viene testa vanno in una pizzeria e poi in una gelateria (scelte a caso) entrambe a San Lorenzo, se viene croce vanno in una pizzeria e poi in una gelateria (scelte a caso) entrambe a Trastevere.
A San Lorenzo vi sono 8 pizzerie di cui 7 buone e 1 pessima, 4 gelaterie di cui 3 buone e 1 pessima. A Trastevere vi sono 12 pizzerie di cui 10 buone e 2 pessime e 5 gelaterie di cui 4 buone e 1 pessima.
1) Determinare la probabilità che i due turisti mangino in una buona pizzeria e in una buona gelateria.
2) Determinare la probabilità che i due turisti abbiano mangiato a San Lorenzo condizionata al fatto che hanno mangiato in una buona pizzeria e in una buona gelateria.
Per entrambi i punti dare la soluzione come numero frazionario.

ESERCIZIO 4 Vi sono due urne. L'urna A contiene 5 palline rosse, 3 bianche e 2 verdi. L'urna B contiene 3 palline rosse, 3 bianche e 3 verdi. Si consideri il seguente esperimento: si estraggono 4 palline senza rimpiazzo dall'urna A e (indipendentemente) si estraggono 5 palline senza rimpiazzo dall'urna B.
Si definiscano le variabili aleatorie N_A, N_B nel seguente modo: N_A è il numero di palline

bianche tra quelle estratte dall'urna A, N_B è il numero di palline bianche tra quelle estratte dall'urna B.
1) Determinare la densità discreta di N_A e di N_B.
2) Calcolare $E(N_A + N_B)$, $Var(N_A + N_B)$.
Si ripete più volte il suddetto esperimento in modo indipendente. Sia T il numero di volte in cui l'esperimento viene ripetuto fino a quando viene estratta almeno una pallina bianca da almeno una delle due urne (includendo nel conteggio di T quest'ultimo esperimento).
3) Determinare il valor medio di T.
Nota: È sufficiente indicare le soluzioni dei punti (1) e (3) in termini di espressioni algebriche eventualmente contenenti fattoriali e coefficienti binomiali. La soluzione del punto (2) deve essere un numero frazionario.

FORMULARIO

Se X è v.a. binomiale di parametri n, p, allora $\mathbb{E}(X) = np$, $Var(X) = np(1-p)$.
Se X è v.a. geometrica di parametro p, allora $\mathbb{E}(X) = 1/p$, $Var(X) = (1-p)/p^2$.
Se X è v.a. di Poisson con parametro λ, allora $\mathbb{E}(X) = \lambda$, $Var(X) = \lambda$.
Se X è v.a. ipergeometrica di parametri n, N, m (tipo: estraggo senza rimpiazzo n palline da un'urna con m palline bianche e $N - m$ palline nere e X è il numero di palline bianche estratte) allora $\mathbb{E}(X) = nm/N$ e $Var(X) = \frac{N-n}{N-1}np(1-p)$ dove $p = m/N$.

Calcolo delle Probabilità. Esame scritto (17/01/06)
Soluzioni (tracce)

ESERCIZIO 1

Chiamiamo p_1, p_2, p_3 la probabilità degli eventi rispettivamente ai punti (1), (2) , (3).
1) Indichiamo due modi per calcolare p_1.
Primo metodo: prendiamo come spazio campionario S l'insieme delle possibili mani di G_1. S ha esiti equiprobabili e $|S| = \binom{52}{13}$. Si ottiene

$$p_1 = \frac{\binom{4}{3}\binom{48}{10}}{\binom{52}{13}}$$

dato che vi sono $\binom{4}{3}$ modi di scegliere 3 assi tra 4 e $\binom{48}{10}$ modi di scegliere 10 tra le carte del mazzo che non sono assi.
Secondo metodo: prendiamo come spazio campionario S l'insieme delle possibili suddivisioni del mazzo tra i 4 giocatori. S ha esiti equiprobabili e $|S| = \binom{52}{13,13,13,13}$. Si ottiene

$$p_1 = \frac{\binom{4}{3}\binom{48}{10}\binom{39}{13,13,13}}{\binom{52}{13,13,13,13}}.$$

Infatti $\binom{4}{3}\binom{48}{10}$ corrisponde al numero di possibili mani del giocatore G_1. Avendo deciso quali carte riceve G_1 resta da ripartire le restanti 39 carte tra G_2, G_3, G_4.
È facile verificare che le due soluzioni coincidono.
2) Si conderino gli eventi E, E_i con $1 \leqslant i \leqslant 4$ dove: E= "almeno un giocatore riceve 3 assi", E_i="G_i riceve 3 assi". Allora

$$E = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4.$$

Poichè i suddetti eventi sono disgiunti abbiamo

$$p_2 = P(E) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + P(E_4).$$

Per simmetria, $p_1 = P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = P(E_4)$. Quindi

$$p_2 = 4p_1.$$

3) $p_3 = P(E^c) = 1 - P(E) = 1 - p_2$.

ESERCIZIO 2

$$p_X(x) = \begin{cases} 2/9 & \text{se } x = 0, \\ 6/9 & \text{se } x = 1, \\ 1/9 & \text{se} x = 2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$p_Y(x) = \begin{cases} 3/9 & \text{se } x = -1, \\ 2/9 & \text{se } x = 0, \\ 4/9 & \text{se } x = 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ 2/9 & \text{se } 0 \leqslant x < 1 \\ 8/9 & \text{se } 1 \leqslant x < 2 \\ 1 & \text{se } x \geqslant 2. \end{cases}$$

Dato che $E(X) = 8/9$ e $E(Y) = 1/9$, $E(10X - 2Y) = 10E(X) - 2E(Y) = 78/9$.
XY assume con probabilità positiva solo i valori $-1, 1$. Quindi

$E(XY) = -P(XY = -1) + P(XY = 1) = -P(X = 1, Y = -1) + P(X = 1, Y = 1) = 1/9.$

$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 10/9 - (8/9)^2 = 26/81.$
$Var(3X) = 9Var(X) = 26/9.$
$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 1/9 - 8/81 = 1/81.$
X, Y non sono indipendenti, infatti

$$p_{(X,Y)}(0,0) = 0 \neq 4/81 = p_X(0)p_y(0)$$

ESERCIZIO 3
Si considerino gli eventi F="esce testa", E="i turisti mangiano in una buona pizzeria e in una buona gelateria". La probabilità al punto (1) è data da $P(E)$, la probabilità al punto (2) è data da $P(F|E)$. Per calcolarle basta osservare che

$$P(E) = P(E|F)P(F) + P(E|F^c)P(F^c), \qquad P(F|E) = P(E|F)P(F)/P(E).$$

Abbiamo

$$P(F) = P(F^c) = 1/2, \qquad P(E|F) = \frac{7}{8}\frac{3}{4}, \qquad P(E|F^c) = \frac{10}{12}\frac{4}{5}.$$

Sostituendo ottieamo

$$P(E) = 127/192, \qquad P(F|E) = 63/127.$$

ESERCIZIO 4
1)

$$P(N_A = k) = \begin{cases} \frac{\binom{3}{k}\binom{7}{4-k}}{\binom{10}{4}} & \text{se } k = 0, 1, 2, 3, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$P(N_B = k) = \begin{cases} \frac{\binom{3}{k}\binom{6}{5-k}}{\binom{9}{5}} & \text{se } k = 0, 1, 2, 3, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

2) N_A è v.a. ipergeometrica di parametri $N = 10$, $m = 3$, $n = 4$ (si veda il formulario nel testo d'esame). N_B è v.a. ipergeometrica di parametri $N = 9$, $m = 3$, $n = 5$ Quindi

$$E(N_A) = 6/5,\ E(N_B) = 5/3,\ Var(N_A) = \frac{14}{25},\ Var(N_B) = 5/9.$$

Essendo $E(N_A + N_B) = E(N_A) + E(N_B)$ e $Var(N_A + N_B) = Var(N_A) + Var(N_B)$ (quest'ultima identità vale essendo N_A, N_B indipendenti), per sostituzione si ottiene

$$E(N_A + N_B) = 43/15,\ Var(N_A + N_B) = 251/255.$$

3) T è v.a. geometrica di parametro p dove

$$p = P(N_A \geqslant 1 \text{ o } N_B \geqslant 1) = 1 - P(N_A = 0, N_B = 0)$$

9

Grazie all'indipendenza

$$p = 1 - P(N_A = 0)P(N_B = 0) = 1 - \frac{\binom{7}{4}}{\binom{10}{4}}\frac{\binom{6}{5}}{\binom{9}{5}}.$$

Vale $E(T) = 1/p$.

Calcolo delle Probabilità. Esame scritto (08/02/06)
Tempo a disposizione: 2 ore e 30 min.

Nota: in assenza di indicazioni specifiche è sufficiente indicare le soluzioni come espressioni algebriche contenenti fattoriali, coefficienti binomiali, coefficienti multinomiali.

FORMULARIO

Se X è v.a. binomiale di parametri n, p, allora $E(X) = np$, $Var(X) = np(1-p)$.
Se X è v.a. geometrica di parametro p, allora $E(X) = 1/p$, $Var(X) = (1-p)/p^2$.
Se X è v.a. di Poisson con parametro l, allora $E(X) = l$, $Var(X) = l$.
Se X è v.a. ipergeometrica di parametri n, N, m (tipo: estraggo senza rimpiazzo n palline da un'urna con m palline bianche e $N-m$ palline nere e X è il numero di palline bianche estratte) allora $E(X) = nm/N$ e $Var(X) = \frac{N-n}{N-1}np(1-p)$ dove $p = m/N$.

ESERCIZIO 1

Andrea, Maria e Carlo fanno parte di un gruppo di 30 ragazzi assunti a part–time da una società di volantinaggio. I 30 ragazzi vengono divisi in tre gruppi: il gruppo A con 12 componenti, il gruppo B con 12 componenti e il gruppo C con 6 componenti. Il gruppo A distribuisce volantini a Trastevere, il gruppo B all'EUR e il gruppo C a San Lorenzo.
Supponendo che tutte le possibili suddivisioni dei 30 ragazzi nei gruppi A,B,C siano equiprobabili determinare la probabilità dei seguenti eventi:
1) Andrea e Maria appartengono allo stesso gruppo,
2) Andrea, Maria e Carlo appartengono a tre gruppi differenti,
3) almeno due dei tre amici (Andrea, Maria e Carlo) stanno nello stesso gruppo,
4) Maria appartiene al gruppo B condizionata al fatto che Andrea appartiene al gruppo A e Carlo appartiene al gruppo C.

ESERCIZIO 2

Da un mazzo di 40 carte si estraggono a caso 5 carte senza rimpiazzo. Chiamare X il numero di assi tra le carte estratte e Y il numero di carte con segno denari tra le carte estratte.
1) Determinare la densità discreta di X e di Y.
2) Determinare la funzione di distribuzione di X.
3) Calcolare $E(X)$, $E(Y)$, $E(X+Y)$, $Var(X)$, $Var(Y)$. *Nota: dare il risultato della forma a/b con a, b interi*
4) X e Y sono indipendenti? (Motivarne la risposta)

ESERCIZIO 3 (I dati di questo esercizio sono di pura fantasia)

La probabilità di essere affetti della malattia α è pari a 2/1000. Il test per verificare la presenza della malattia α è efficace sugli individui sani con probabilità 97/100 (cioè se un individuo sano fa il test allora dal test risulta che è sano con probabilità 97/100) mentre è efficace sugli individui malati con probabilità 95/100.
1) Dire qual è la probabilità che facendo fare il test ad un individuo scelto a caso questo risulti dal test essere sano.

11

2) Dire qual è la probabilità che un individuo sia malato condizionata al fatto che dal test risulti malato.

ESERCIZIO 4

Considerare il seguente gioco: un dado viene lanciato 7 volte di seguito in modo indipendente, ad ogni lancio si vincono 2 euro se esce il numero 1 o il numero 2 altrimenti si perde 1 euro.
Chiamata X la vincita totale, determinare
1) la densità discreta di X,
2) $E(X)$, $Var(X)$, $Cov(X, X)$ *Nota: dare il risultato della forma* a/b *con* a, b *interi.*
Si ripete il gioco in modo indipendente fino a quando si ha una vincita totale negativa. Definito T il numero di giocate effettuate (includendo nel conteggio di T la giocata con vincita totale negativa) si determini $E(T)$.

Calcolo delle Probabilità. Esame scritto (08/02/06)
TRACCE DELLE SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

Chiamo p_i la soluzione al punto i–esimo.
1)
$$p_1 = \frac{\binom{28}{10,12,6} + \binom{28}{12,10,6} + \binom{28}{12,12,4}}{\binom{30}{12,12,6}}$$
(gli addendi a numeratore sono il numero di suddivisioni in cui Andrea e Maria stanno entrambi rispettivamente in A, B e C)
2)
$$p_2 = 3!\frac{\binom{27}{11,11,5}}{\binom{30}{12,12,6}}$$
3) L'evento il considerazione è il complementare dell'evento al punto 2, quindi $p_3 = 1 - p_2$.
4) Siano E e F gli eventi definiti come $E =$"Maria sta in B", $F =$"Andrea sta in A e Carlo sta in C. Allora
$$p_4 = P(E|F) = P(E \cap F)/P(F) = \frac{\binom{27}{11,11,5}}{\binom{28}{11,12,5}}$$

ESERCIZIO 2

X è v.a. ipergeometrica di parametri $N = 40, n = 5, m = 4$. Y è v.a. ipergeometrica di parametri $N = 40, n = 5, m = 10$.
1)
$$p_X(a) = P(X = a) = \begin{cases} \frac{\binom{4}{a}\binom{36}{5-a}}{\binom{40}{5}} & \text{se } a \in \{0,1,2,3,4\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$
$$p_Y(a) = P(Y = a) = \begin{cases} \frac{\binom{10}{a}\binom{30}{5-a}}{\binom{40}{5}} & \text{se } a \in \{0,1,2,3,4,5\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$
2)
$$F_X(a) = P(X \le a) = \begin{cases} 0 & \text{se } a < 0 \\ p_X(0) & \text{se } 0 \le a < 1 \\ p_X(0) + p_X(1) & \text{se } 1 \le a < 2 \\ p_X(0) + p_X(1) + p_X(2) & \text{se } 2 \le a < 3 \\ p_X(0) + p_X(1) + p_X(2) + p_X(3) & \text{se } 3 \le a < 4 \\ 1 & \text{se } 4 \le a \end{cases}$$
3) Dalle formule per le v.a. ipergeometriche si ottiene: $E(X) = 5 \cdot 4/40 = 1/2$, $E(Y) = 5 \cdot 10/40$, $Var(X) = \frac{35}{39} \cdot 5 \cdot \frac{4}{40}\frac{36}{40} = ...$, $Var(Y) = \frac{35}{39} \cdot 5 \cdot \frac{10}{40}\frac{30}{40} = ...$ Dato che in generale vale $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ si ha $E(X+Y) = 7/4$.
4) X e Y non sono indipendenti. Infatti $P(X \ge 2, Y = 5) = 0$ mentre $P(X \ge 2) > 0$ e $P(Y = 5) > 0$. Quindi $P(X \ge 2, Y = 5) \ne P(X \ge 2)P(Y = 5)$.

ESERCIZIO 3

Si considerino i seguenti eventi:
A="l'individuo è sano"
B="l'individuo è malato"
E="dal test risulta che l'individuo è sano"

11

F=”dal test risulta che l’individuo è malato”
Allora i dati del problema si possono scrivere nel seguente modo: $P(A) = 998/1000$, $P(B) = 2/1000$, $P(E|A) = 97/100$, $P(F|A) = 3/100$, $P(E|B) = 5/100$, $P(F|B) = 95/100$.
1)

$$P(E) = P(E|A)P(A) + P(E|B)P(B) = \frac{97}{100}\frac{998}{1000} + \frac{5}{100}\frac{2}{1000}$$

2) Per la formula di Bayes

$$P(B|F) = \frac{P(F|B)P(B)}{P(F|B)P(B) + P(F|A)P(A)} = \frac{95 \cdot 2}{95 \cdot 2 + 3 \cdot 998}$$

ESERCIZIO 4
Chiamiamo Z il numero di volte per cui nei 7 lanci sono usciti 1 o 2, in altre parole Z è il numero di lanci nel gioco per cui si vincono 2 euro. Allora

$$X = 2Z - (7 - Z) = 3Z - 7$$

In particolare X assume solo i valori in W dove

$$W = \{-7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, 14\}.$$

Dato che $Z = Bin(7, 1/3)$ e che

$$P(X = a) = P\left(Z = \frac{a+7}{3}\right)$$

si ha

$$p_X(a) = P(X = a) = \begin{cases} \binom{7}{\frac{7+a}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{7+a}{3}} \left(\frac{2}{3}\right)^{7-\frac{7+a}{3}} & \text{se } a \in W \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

2) Dato che $Z = Bin(7, 1/3)$ abbiamo $E(Z) = 7/3$, $Var(Z) = 7\frac{1}{3}\frac{2}{3} = 14/9$. Quindi $E(X) = E(3Z - 7) = 3E(Z) - 7 = 0$, $Cov(Z) = Var(Z) = 9Var(X) = 14$.
3) T è v.a. geometrica di parametro p con

$$p = P(X < 0) = p_X(-7) + p_X(-4) + p_X(-1)$$

Quindi $E(T) = 1/p$.

Calcolo delle Probabilità. Esame scritto (12/06/06)

Tempo a disposizione: 2 ore e 30 min.

Nota: In tutti gli esercizi escluso l'esercizio 3 le soluzioni numeriche possono essere date come prodotto di frazioni. Nell'esercizio 3 è consentito dare soluzioni come frazione di prodotti di coefficienti binomiali. **Non è consentito l'uso della calcolatrice**

ESERCIZIO 1

Siano X e Y variabili aleatorie di Poisson con parametro rispettivamente 4 e 3, indipendenti.

1) Calcolare $E(3XY + Y + X^2)$, $\mathrm{Cov}(X + Y, 3X + Y)$.

2) Dire (e motivarne la risposta) se $E(X^{12}) \leqslant E(X^{200})$.

ESERCIZIO 2

Il cuoco di una mensa aperta solo a pranzo decide il menu del giorno secondo il seguente sistema:

Con probabilità $3/4$ *il primo è pasta e con probabilità* $1/4$ *è riso. Se il primo è pasta allora con probabilità* $1/2$ *il secondo è carne e con probabilità* $1/2$ *il secondo è pesce. Mentre se il primo è riso allora con probabilità* $2/3$ *il secondo è carne e con probabilità* $1/3$ *il secondo è pesce.* Il cuoco decide il menu nei vari giorni in modo indipendente seguendo il metodo suddetto. La mensa è funzionante tutti i giorni dell'anno.

Considerare le variabili aleatori X, Y, Z, W definite come segue:

X è il numero di giorni in una settimana in cui si mangia pasta,

Y è il numero di giorni in una settimana in cui si mangia riso,

Z è il numero di giorni in una settimana in cui si mangia carne,

W è il numero di giorni in una settimana in cui si mangia pesce.

1) Calcolare la probabilità che in un dato giorno il primo piatto sia riso sapendo che il secondo è carne.

2) Dire se X e Y sono indipendenti.

3) Dire se X e Z sono indipendenti.

4) Calcolare media e varianza di X e di Z.

ESERCIZIO 3

Un'urna contiene 10 palline numerate da 1 a 10. Le palline numerate da 1 a 5 sono verdi e quelle numerate da 6 a 10 sono gialle.

Si estraggono senza rimpiazzo 3 palline a caso dall'urna. Reintrodotte nell'urna si ripete l'estrazione (in modo indipendente).

Determinare la probabilità dei seguenti eventi:

1) in entrambe le estrazioni vengono estratte solo palline verdi,

2) tra le palline estratte alla prima estrazione e le palline estratte alla seconda estrazione vi è esattamente una pallina in comune,

3) la probabilità che alla seconda estrazione siano uscite esattamente 2 palline verdi sapendo che le palline estratte alla prima estrazione sono tutte gialle e che non vi sono palline in comune tra la prima e la seconda estrazione.

ESERCIZIO 4

Una stringa binaria è una successione finita di 0 e 1, ad esempio

$$0110111100. \qquad (0.1)$$

13

Consideriamo un sistema di copiatura con le seguenti proprietà: data una stringa questa viene ricopiata entrata per entrata in modo indipendente e ogni singola entrata di valore 0 è copiata come 0 (cioè correttamente) con probabilità $2/3$ e come 1 con probabilità $1/3$,mentre ogni entrata di valore 1 è copiata come 1 (cioè correttamente) con probabilità $4/5$ e come 0 con probabilità $1/5$,

Data la stringa S chiamiamo S' la "copia" di S ottenuta con il suddetto sistema di copiatura e chiamiamo S'' la "copia" di S' ottenuta applicando nuovamente il suddetto sistema di copiatura. Definiamo N il numero di zeri che compaiono in S'.

1) Se S è la stringa definita in (0.1), quant'è la probabilità che $S' = 0000000000$?
2) Determinare media e varianza di N quando S è la stringa definita in (0.1).
3) Se $S = 0$ quant'è la probabilità che $S'' = 0$?
4) Se $S = 0$ quant'è la probabilità che $S'' = 1$?
5) Se $S = 00$ quant'è la probabilità che $S'' = 01$?

FORMULARIO

Se X è v.a. binomiale di parametri n, p, allora $\mathbb{E}(X) = np$, $Var(X) = np(1-p)$.
Se X è v.a. geometrica di parametro p, allora $\mathbb{E}(X) = 1/p$, $Var(X) = (1-p)/p^2$.
Se X è v.a. di Poisson con parametro λ, allora $\mathbb{E}(X) = \lambda$, $Var(X) = \lambda$.
Se X è v.a. ipergeometrica di parametri n, N, m (tipo: estraggo senza rimpiazzo n palline da un'urna con m palline bianche e $N - m$ palline nere e X è il numero di palline bianche estratte) allora $\mathbb{E}(X) = nm/N$ e $Var(X) = \frac{N-n}{N-1}np(1-p)$ dove $p = m/N$.

14

Calcolo delle Probabilità. Esame scritto (12/06/06)
Tracce delle soluzioni

ESERCIZIO 1

1) Abbiamo: $E(X) = Var(X) = 4$, $E(X^2) = Var(X)+E(X)^2 = 20$, $E(Y) = Var(Y) = 3$. Grazie alla linearità del valore atteso e all'indipendenza di X, Y abbiamo

$$E(3XY + Y + X^2) = 3E(X)E(Y) + E(Y) + E(X^2) = 3 \cdot 4 \cdot 3 + 3 + 20 = 59$$

e

$$Cov(X + Y, 3X + Y) = Cov(X, 3X) + Cov(Y, Y) = 3Var(X) + Var(Y) = 15$$

2) Siccome X ha valori in $\mathbb{N}$, $X^{12} \leqslant X^{200}$. Per la proprietà di monotonia di $E(\cdot)$ abbiamo che $E(X^{12}) \leqslant E(X^{200})$

ESERCIZIO 2

Considerare i seguenti eventi riferiti al menù di un dato giorno:
$A=$ il primo è pasta,
$B=$ il primo è riso,
$C=$ il secondo è carne.

Abbiamo $P(A) = 3/4$
$P(B) = 1/4$,
$P(C) = P(A)P(C|A) + P(B)P(C|B) = \frac{3}{4}\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\frac{2}{3} = \frac{13}{24}$

1) Per il teorema di Bayes

$$p = P(B|C) = \frac{P(C|B)P(B)}{P(C)} = \frac{2}{3}\frac{1}{4}\frac{24}{13} = \frac{4}{13}.$$

2) $X + Y = 7$ quindi X e Y non sono indipendenti. Ad esempio $p(X = 0, Y = 0) = 0$, mentre $P(X = 0) > 0, P(Y > 0) > 0$ e quindi $p(X = 0, Y = 0) \neq p(X = 0)p(Y = 0)$.
3) X e Z non sono indipendenti. Ad esempio $p(X = 0) = (1/4)^7$, $p(Z = 0) = (13/24)^7$ e $p(X = 0, Z = 0) = (1/4)^7(1/3)^7$. quindi $p(X = 0, Z = 0) \neq p(X = 0)p(Z = 0)$.
4) $X = Bin(7, 3/4)$, $Z = Bin(7, 13/24)$. Quindi

$E(X) = 21/4$, $Var(X) = 21/16$, $E(Z) = 7{\cdot}13/24$, $Var(Z) = 7{\cdot}(13/24){\cdot}(11/24)$

ESERCIZIO 3

1)

$$p_1 = \left(\frac{\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}}\right)^2$$

2)

$$p_2 = \frac{3\binom{7}{2}}{\binom{10}{3}}$$

3)

$$p_3 = \frac{\binom{5}{3}2\binom{5}{2}}{\binom{5}{3}\binom{7}{3}}$$

ESERCIZIO 4

1) La stringa S ha 6 cifre pari a 1 e 4 cifre pari a 0. Per ottenere S' gli zeri devono essere copiati correttamente e gli uno erroneamente. per indipendenza abbiamo

$$p_1 = (2/3)^4 \cdot (1/5)^6$$

15

2) Sia N_a il numero di zeri di S copiati correttamente e N_b il numero di uni di S copiati erroneamente. Allora

$$N = N_a + N_b$$

Siccome $N_a = Bin(4, 2/3)$, $N_b = Bin(6, 1/5)$ e N_a, N_b sono indipendenti abbiamo

$$E(N) = E(N_a) + E(N_b) = 4 \cdot 2/3 + 6/5,$$

e

$$Var(N) = Var(N_a) + Var(N_b) = 4(2/3)(1/3) + 6(1/5)(4/5)$$

3) Scriviamo $p(y, z|x)$ per la probabilita' che, facendo 2 copie a partire dalla cifra x, la prima copia dia y e la seconda z. Allora $p(0,0|0) = (2/3)^2 = 4/9$, $p(0,1|0) = (2/3)(1/3) = 2/9$, $p(1,0|0) = (1/3)(1/5) = 1/15$, $p(1,1|0) = (1/3)(4/5) = 4/15$.

In particolare,

$$p(S'' = 0|S = 0) = p(0,0|0) + p(1,0|0) = 4/9 + 1/15 = 23/45$$

4) Si puo' ragionare come sopra o semplicemente osservare che

$$p(S'' = 1|S = 0) = 1 - p(S'' = 0|S = 0) = 22/45$$

5)

$$p(S'' = 01|S = 00) = p(S'' = 0|S = 0)p(S'' = 1|S = 0) = (23/45)(22/45).$$

16

Calcolo delle Probabilità. Esame scritto (17/07/06)
Tempo a disposizione: 2 ore e 30 min.

Nota: salvo indicazione esplicita è sufficiente dare delle soluzioni come espressioni algebriche eventualmente contenenti fattoriali e coefficienti binomiali.

ESERCIZIO 1
Si consideri il seguente esperimento:

Da un'urna contenente 5 palline rosse, 3 palline verdi e 1 pallina gialla si estraggono senza rimpiazzo 3 palline. Sia X in numero di palline rosse estratte. Se $X = 0$ allora si estraggono altre 2 palline senza rimpiazzo dalle rimanenti 6 palline.

Chiamato Y il numero totale di palline rosse estratte, determinare:
1) $E(X)$, $Var(X)$, $Var(2X+1)$, $E(X^2)$, (*dare la soluzione come numero frazionario*)
2) la densità discreta di Y.

ESERCIZIO 2
Si consideri il seguente esperimento:

Si dispone di un dado e di una moneta truccata per cui testa esce con probabilità $1/3$ e croce esce con probabilità $2/3$. Si lancia il dado. Sia K il numero uscito. Se $K = 1,2$ allora si lancia la moneta 3 volte, se $K = 3,4,5$ allora si lancia la moneta 4 volte mentre se $K = 6$ allora si lancia la moneta 2 volte. Tutti i lanci sono indipendenti.

Sia X il numero di volte in cui è uscita testa nel suddetto esperimento.
1) Determinare la probabilità che $X = 2$ (*dare la soluzione come numero frazionario*).
2) Determinare la probabilità che $K = 5$ sapendo che $X = 2$(*dare la soluzione come numero frazionario*).
3) Dire se X e K sono indipendenti.

ESERCIZIO 3
X, Y, Z sono variabili aleatorie indipendenti, X, Y sono variabili geometriche con valore atteso $E(X) = 4$, $E(Y) = 3$ mentre Z è variabile di Poisson con $E(Z) = 1$.
1) Determinare $E(4X + 10Y + X^2YZ)$, $Cov(2X+1, Y+Z+3)$, $Var(X+2Y+Z)$ (*dare la soluzione come numero frazionario*).

ESERCIZIO 4
Da un mazzo di 40 carte si estraggono 5 carte. Determinare la probabilità dei seguenti eventi:
1) le 5 carte sono tutte di bastoni e includono il cavallo di bastoni,
2) vi sono esattamente 4 carte di denari o vi è esattamente un cavallo,
3) o vi sono esattamente 4 carte di denari o vi è esattamente un cavallo.

FORMULARIO

Se X è v.a. binomiale di parametri n, p, allora $E(X) = np$, $Var(X) = np(1-p)$.
Se X è v.a. geometrica di parametro p, allora $E(X) = 1/p$, $Var(X) = (1-p)/p^2$.
Se X è v.a. di Poisson con parametro λ, allora $E(X) = \lambda$, $Var(X) = \lambda$.
Se X è v.a. ipergeometrica di parametri n, N, m (tipo: estraggo senza rimpiazzo n palline da un'urna con m palline bianche e $N-m$ palline nere e X è il numero di palline bianche estratte) allora $E(X) = nm/N$ e $Var(X) = \frac{N-n}{N-1}np(1-p)$ dove $p = m/N$.

17

Calcolo delle Probabilità. TRACCE esame scritto (17/07/06)

ESERCIZIO 1

1) X è variabile aleatoria ipergeometrica di parametri $n = 3$, $m = 5$, $N = 9$ (vedi formulario testo esame). In particolare

$$E(X) = nm/N = 5/3,$$
$$Var(X) = \frac{6}{8} \cdot 3 \cdot \frac{5}{9}\frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$
$$E(X^2) = Var(X) + E(X)^2 = 5/9 + (5/3)^2 = 10/3$$
$$Var(2X + 1) = 4Var(X) = 20/9$$

2) Per la suddetta discussione

$$P(X = k) = \frac{\binom{5}{k}\binom{4}{3-k}}{\binom{9}{3}}, \qquad k = 0, 1, 2, 3.$$

Osserviamo che se $Y = 0$ allora $X = 0$ ma $P(Y = 0|X = 0) = 0$. Quindi Y assume sempre valori positivi, in particulare assume solo valore $1, 2, 3$:

$$P(Y = 1) = P(X = 1) + P(Y = 1|X = 0)P(X = 0) = P(X = 1) = \frac{\binom{5}{1}\binom{4}{2}}{\binom{9}{3}} + \frac{\binom{5}{1}}{\binom{6}{2}} \cdot \frac{\binom{4}{3}}{\binom{9}{3}}$$
$$P(Y = 2) = P(X = 2) + P(Y = 2|X = 0)P(X = 0) = \frac{\binom{5}{2}\binom{4}{1}}{\binom{9}{3}} + \frac{\binom{5}{2}}{\binom{6}{2}} \cdot \frac{\binom{4}{3}}{\binom{9}{3}}$$
$$P(Y = 3) = P(X = 3) + P(Y = 3|X = 0)P(X = 0) = P(X = 3) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{9}{3}}$$

ESERCIZIO 2

1)

$$P(X = 2) = P(X = 2|K = 1, 2)P(K = 1, 2) + P(X = 2|K = 3, 4, 5)P(K = 3, 4, 5)$$
$$+ P(X = 2|K = 6)P(K = 6) =$$
$$\binom{3}{2}(1/3)^2(1/3) + \binom{4}{2}(1/3)^2(2/3)^2(1/2) + (1/3)^2(1/6) = 13/54.$$

2)

$$P(K = 5|X = 2) = \frac{P(X = 2|K = 5)P(K = 5)}{P(X = 2)} = \frac{\binom{4}{2}(1/3)^2(2/3)^2(1/6)}{13/54} = 8/39$$

3) X e K non sono indipendenti. Infatti, $P(X = 3, K = 2) = 0$ mentre $P(X = 3) > 0$, $P(K = 2) > 0$ quindi $P(X = 3, K = 2) \neq P(X = 3)P(K = 2)$.

ESERCIZIO 3

X è v.a. geometrica di parametro $1/4$, Y è v.a. geometrica di parametro $1/3$, Z è v.a. di Poisson di parametro 1.

Quindi

$$Var(X) = 12, \quad Var(Y) = 6, \quad Var(Z) = 1 \quad E(X^2) = Var(X) + E(X)^2 = 28$$

18

Allora otteniamo:

$$E(4X+10Y+X^2YZ) = 4E(X)+10E(Y)+E(X^2)E(Y)E(Z) = 4\cdot4+10\cdot3+28\cdot3\cdot1 = 130,$$

$$Var(X+2Y+Z) = Var(X) + 4Var(Y) + Var(Z) = 12 + 4\cdot 6 + 1 = 37$$

Siccome $2X+1$ e $Y+Z+3$ sono indipendenti,

$$Cov(2X+1, Y+Z+3) = 0.$$

ESERCIZIO 4

1)

$$p_1 = \frac{\binom{9}{4}}{\binom{40}{5}}$$

2) Sia A l'evento che vi sono esattamente 4 carte di denari e sia B l'evento che vi è esattamente un cavallo. Allora

$$P(A) = \frac{30\binom{10}{4}}{\binom{40}{5}}$$

$$P(B) = \frac{4\binom{36}{4}}{\binom{40}{5}}$$

Se si verifica $A \cap B$ allora ho due possibilità incompatibili:

a) vi sono il cavallo di denari, 3 carte di denari diverse dal cavallo e 1 carta che non è di denari e non è un cavallo,

b) vi sono 4 carte di denari diverse dal cavallo e 1 cavallo non di denari.

Il primo evento, caso (a), si verifica con probabilità

$$\frac{\binom{9}{3}27}{\binom{40}{5}}$$

mentre il secondo evento, caso (b), si verifica con probabilità

$$\frac{\binom{9}{4}3}{\binom{40}{5}}$$

Quindi

$$P(A\cap B) = \frac{\binom{9}{3}27 + \binom{9}{4}3}{\binom{40}{5}}$$

Per il principio di inclusione–esclusione (qui banale)

$$p_2 = P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

3)

$$p_3 = P((A\cup B)\setminus(A\cap B)) = P(A\cup B) - P(A\cap B)$$

Calcolo delle Probabilità. Esame scritto (12/09/06)
Tempo a disposizione: 2 ore e 30 min.

NOTA: Per gli esercizi 1,2,3 e per il quesito 2 dell'esercizio 4 bisogna dare il risultato come numero frazionario svolgendo i calcoli. SOLO per i quesiti 1 e 3 dell'esercizio 4 è sufficiente dare delle soluzioni come espressioni algebriche, eventualmente contenenti fattoriali e coefficienti binomiali. NON è consentito l'uso della calcolatrice.

ESERCIZIO 1

Considerare le variabili aleatorie X e Y, con X a valori in $\{1,2\}$ e Y a valori in $\{-2,0,2\}$, la cui densità congiunta è rappresentata dalle entrate della seguente tabella:

$X \backslash Y$	-2	0	2
1	1/18	2/18	3/18
2	2/18	4/18	6/18

(cioè $p_{(X,Y)}(1,-2) = 1/18$, $p_{(X,Y)}(1,0) = 2/18$,...).
1) Dire se esiste una tale coppia di variabili aleatorie e perchè.
2) Determinare la densità discreta di X e di Y, la funzione di distribuzione di X e calcolare $E(2X-Y)$, $E(XY)$ e $Var(X)$, $Var(3X+12)$, $Cov(X,Y)$.
3) Dire se X e Y sono variabili aleatorie indipendenti.

ESERCIZIO 2

Vi sono due urne: l'urna A contiene 3 palline rosse, 2 palline verdi e 1 pallina gialla, l'urna B contiene 3 palline rosse, 5 palline verdi e 2 palline gialle.
1) Dall'urna A viene estratta una pallina e, in modo indipendente, dall'urna B viene pure estratta una pallina. Dire qual è la probabilità che le palline abbiamo lo stesso colore.

Reintrodotte le palline nelle rispettive urne si esegue il seguente esperimento: dall'urna A vengono estratte 3 palline, una dopo l'altra, senza rimpiazzo.
2) Dire qual è la probabilità che la prima pallina sia rossa, la seconda verde e la terza gialla.
3) Dire qual è la probabilità che le prime due palline abbiano lo stesso colore e la terza un colore differente (rispetto alle prime due palline).

ESERCIZIO 3

Le seguenti considerazioni si riferiscono a competizioni calcistiche e sono di pura fantasia:

L'Italia deve giocare contro una delle seguenti squadre: Francia, Polonia, Romania. La squadra contro cui l'Italia gioca viene decisa lanciando un dado: se esce un numero pari l'Italia gioca contro la Francia, se esce 1 l'Italia gioca contro la Polonia, se esce 3 o 5 l'Italia gioca contro la Romania. Si stima che l'Italia abbia le seguenti probabilità di vittoria: 40% contro la Francia, 70% contro la Polonia, 80% contro la Romania. Determinare:
1) la probabilità che l'Italia vinca,
2) la probabilità che l'Italia abbia giocato contro la Francia sapendo che ha perso la partita.
3) la probabilità che l'Italia abbia giocato contro la Francia sapendo che ha perso la partita e che non ha giocato contro la Romania.

ESERCIZIO 4

Ad una festa vi sono 10 ragazzi (5 italiani e 5 cinesi) e 10 ragazze (5 italiane e 5 cinesi).

10

Vengono formate 10 coppie di ballo (ragazzo+ragazza) abbinando le persone in modo puramente casuale.
1) Dire qual è la probabilità che in ogni coppia il ragazzo e la ragazza siano della stessa nazione.
2) Chiamato X il numero di coppie in cui il ragazzo e la ragazza sono entrambi italiani, calcolare $E(X)X$ e $Var(X)$.

Supporre ora che ad ogni ballo le coppie vengano riformate, sempre in modo puramente casuale. Sia T la variabile aleatoria così definita: l'evento al punto 1) si verifica per la prima volta al ballo T-esimo.
3) Determinare $E(T), E(T^2)$.

FORMULARIO

Se X è v.a. binomiale di parametri n, p, allora $E(X) = np$, $Var(X) = np(1-p)$.
Se X è v.a. geometrica di parametro p, allora $E(X) = 1/p$, $Var(X) = (1-p)/p^2$.
Se X è v.a. di Poisson con parametro λ, allora $E(X) = \lambda$, $Var(X) = \lambda$.
Se X è v.a. ipergeometrica di parametri n, N, m (tipo: estraggo senza rimpiazzo n palline da un'urna con m palline bianche e $N-m$ palline nere e X è il numero di palline bianche estratte) allora $E(X) = nm/N$ e $Var(X) = \frac{N-n}{N-1}np(1-p)$ dove $p = m/N$.

Calcolo delle Probabilità. Esame scritto (12/09/06)
Soluzioni

ESERCIZIO 1

1) Variabili X, Y come nell'esercizio esistono. Ne esibiamo un esempio. Si consideri l'insieme

$$S = \{1, 2\} \times \{-2, 0, 2\}.$$

Si definisca la funzione $P : \mathcal{P}(S) \to \mathbb{R}$, dove $\mathcal{P}(S)$ è l'insieme delle parti di S, come

$$P(A) = \sum_{(x,y)\in A} p_{(X,Y)}(x, y), \qquad A \subset S.$$

Poichè la tabella ha entrate non negative con somma pari a 1, P è a valori in $[0, 1]$. Inoltre, essa è additiva e quindi, essendo S finito, σ–additiva. In particolare, $(S, \mathcal{P}(S), P)$ è uno spazio di probabilità.
Inoltre le variabili aleatorie $X, Y : S \to \mathbb{R}$ definite come

$$X(x, y) = x, \qquad Y(x, y) = y, \qquad \forall (x, y) \in S,$$

hanno densità congiunta come nella tabella.
2.1) Densità discreta di X:

$$\begin{cases} p_X(1) = 1/3, \\ p_X(2) = 2/3, \\ p_X(x) = 0 \text{ se } x \notin \{1, 2\}. \end{cases}$$

2.2) Densità discreta di Y:

$$\begin{cases} p_Y(-2) = 3/18, \\ p_Y(0) = 6/18, \\ p_Y(2) = 9/18, \\ p_Y(y) = 0 \text{ se } y \notin \{-2, 0, 2\}. \end{cases}$$

2.3) Funzione di distribuzione di X:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1, \\ 1/3 & \text{se } 1 \leqslant x < 2, \\ 1 & \text{se } x \geqslant 2. \end{cases}$$

2.4) $E(X) = 5/3, E(Y) = 2/3$ quindi $E(2X - Y) = 2E(X) - E(Y) = 8/3$.
2.5)

$$E(XY) = -2(1/18) + 2(3/18) - 4(2/18) + 4(6/18) = 10/9$$

oppure osservare che X, Y sono indipendenti e quindi $E(XY) = E(X)E(Y) = 10/9$.
2.6) $E(X^2) = 3$. Quindi $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2/9$.
2.7) $Var(3X + 12) = 9Var(X) = 2$.
2.8) $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$.
3) X e Y sono indipendenti in quanto dalla tabella e dai calcoli ai punti 2.1) e 2.2) si deriva che

$$p_{(X,Y)}(x, y) = p_X(x)p_Y(y), \qquad \forall (x, y) \in \{1, 2\} \times \{-2, 0, 2\}.$$

ESERCIZIO 2

1) Si considerino gli eventi

22

E ="le palline estratte hanno lo stesso colore",
E_1 ="le palline estratte sono rosse",
E_2 ="le palline estratte sono verdi",
E_3 ="le palline estratte sono gialle".
Allora $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$ e E_1, E_2, E_3 sono a 2 a 2 disgiunti. Quindi

$$p_1 = p(E) = p(E_1) + p(E_2) + p(E_3) = (3/6)(3/10) + (2/6)(5/10) + (1/6)(2/10) = 7/20$$

2) Si considerino i seguenti eventi
E ="prima pallina rossa, seconda verde, terza gialla",
E_1 ="prima pallina rossa",
E_2 ="seconda pallina verde",
E_3 ="terza palline gialla".
Allora $E = E_1 \cap E_2 \cap E_3$ e quindi

$$p_2 = P(E) = P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1 \cap E_2) = (3/6)(2/5)(1/4) = 1/20.$$

3) Le palline estratte devono essere dei seguenti colori (in ordine di estrazione): RRV o RRG o VVR o VVG. Ragionando come nel punto precedente otteniamo

$$p_3 = P(RRV) + P(RRG) + P(VVR) + P(VVG) =$$
$$(3/6)(2/5)(2/4) + (3/6)(2/5)(1/4) + (2/6)(1/5)(3/4) + (2/6)(1/5)(1/4) = 26/120.$$

ESERCIZIO 3
Si considerino i seguenti eventi:
E_1 ="l'Italia gioca contro la Francia",
E_2 ="l'Italia gioca contro la Polonia",
E_3 ="l'Italia gioca contro la Romania",
E ="l'Italia vince.
1)

$$p_1 = P(E) = P(E_1)P(E|E_1) + P(E_2)P(E|E_2) + P(E_3)P(E|E_3) =$$
$$(3/6)(4/10) + (1/6)(7/10) + (2/6)(8/10) = 35/60.$$

2)

$$p_2 = P(E_1|E^c) = \frac{P(E_1 \cap E^c)}{P(E^c)} = \frac{P(E^c|E_1)P(E_1)}{1 - p_1} = \frac{(6/10)(3/6)}{25/60} = 18/25.$$

3)

$$p_3 = P(E_1|E^c \cap E_3^c) = \frac{P(E_1 \cap E^c \cap E_3^c)}{P(E^c \cap E_3^c)}$$

Si osservi che $E_1 \cap E^c \cap E_3^c = E_1 \cap E_c$ Quindi

$$P(E_1 \cap E^c \cap E_3^c) = P(E_1 \cap E_c) = P(E^c|E_1)P(E_1) = (6/10)(3/6) = 18/60.$$

Si osservi che

$$E^c \cap E_3^c = (E^c \cap E_1) \cup (E^c \cap E_2)$$

quindi

$$P(E^c \cap E_3^c) = P(E^c \cap E_1) + P(E^c \cap E_2) = P(E^c|E_1)P(E_1) + P(E^c|E_2)P(E_2) =$$
$$(6/10)(3/6) + (3/10)(1/6) = 21/60.$$

Mettendo insieme i calcoli suddetti abbiamo

$$p_3 = \frac{18/60}{21/60} = \frac{18}{21}.$$

ESERCIZIO 4. Chiamiamo

$$m_1, m_2, \ldots, m_{10}$$

i 10 ragazzi, dove $m_1, m_2, \ldots, m_5$ sono i ragazzi italiani e $m_6, m_7, \ldots, m_{10}$ sono i ragazzi cinesi.
Chiamiamo

$$f_1, f_2, \ldots, f_{10}$$

le 10 ragazze, dove $f_1, f_2, \ldots, f_5$ sono le ragazze italiane e $f_6, f_7, \ldots, f_{10}$ sono le ragazze cinesi.
1) Ogni abbinamento può essere codificato da una permutazione

$$(x_1, \ldots, x_{10})$$

di $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, \ldots, f_{10}\}$, per cui la ragazza x_i balla con il ragazzo m_i, $1 \leqslant i \leqslant 10$.
Lo spazio campionario S è dato dalle permutazioni di $\mathcal{F}$, quindi $|S| = 10!$. Inoltre gli esiti sono equiprobabili per simmetria. L'evento che tutte le coppie sono di ragazzo e ragazza della stessa nazionalità è descritto dal sottinsieme E:

$$E = \{x \in S \,:\, \{x_1, \ldots, x_5\} = \{f_1, \ldots, f_5\},\ \{x_6, \ldots, x_{10}\} = \{f_6, \ldots, f_{10}\}\ \}.$$

Quindi

$$p_1 = P(E) = \frac{|E|}{|S|} = \frac{5!5!}{10!}.$$

3) T è variabile geometrica di parametro $p = p_1$. Quindi

$$E(T) = 1/p_1, \qquad Var(T) = (1 - p_1)/p_1^2$$

2) Conviene considerare lo spazio campionario ridotto in cui l'esito è dato dall'insieme (non ordinato) delle ragazze che ballano con gli italiani:

$$S' = \{\{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\} \,:\, y_i \neq y_j \text{ per } i \neq j,\ \{y_1, \ldots, y_5\} \subset \mathcal{F}\}.$$

Per simmetria, S' ha esiti equiprobabili. Inoltre

$$\{X = k\} = \{y \in S' \,:\, |y \cap \{f_1, \ldots, f_5\}| = k\},$$

quindi

$$P(X = k) = \frac{|\{X = k\}|}{|S'|} = \frac{\binom{5}{k}\binom{5}{5-k}}{\binom{10}{5}}.$$

Quindi X è variabile ipergeometrica di parametri $N = 10, n = 5, m = 5$. In particolare

$$E(X) = 25/10, \qquad Var(X) = 25/36.$$

ESONERO PARZIALE DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ

6 Novembre 2006 - Tempo a disposizione: 1 ora e 30 minuti

Nota: Non è consentito l'uso di calcolatrici. Per gli esercizi 2 e 3 bisogna indicare le soluzioni come numero frazionario, per gli esercizi 1 e 4 è sufficiente indicare le soluzioni come espressioni algebriche eventualmente contenenti coefficienti binomiali e/o coefficienti multinomiali.

ESERCIZIO 1 Si estraggono 5 carte da un mazzo di 40 carte senza rimpiazzo. Calcolare la probabilità dei seguenti eventi:
1) le 5 carte estratte sono dello stesso seme,
2) le 5 carte estratte sono dello stesso seme sapendo che sono stati estratti il 3 e il 4 di denari,
3) tra le 5 carte estratte vi sono esattamente 3 assi,
4) tra le 5 carte estratte vi sono 4 carte dello stesso valore.

ESERCIZIO 2 Si distribuiscono a caso 16 caramelle tra 4 bambini (Andrea, Paolo, Lorenzo e Federico) in modo tale che ogni bambino riceva almeno una caramella. Calcolare la probabilità che
1) ogni bambino riceva almeno 3 caramelle,
2) Andrea riceva almeno 3 caramelle,
3) Andrea riceva esattamente 3 caramelle.

ESERCIZIO 3 Si consideri il seguente gioco.
Un'urna contiene 12 palline: 5 sono bianche, 4 sono rosse e 3 sono nere.
Si estraggono 3 palline senza rimpiazzo.
Se le palline sono dello stesso colore si lancia una moneta 2 volte. Se esce almeno una volta testa allora si vince il gioco.
Se le palline non sono tutte dello stesso colore si lancia una moneta 1 volta. Se esce testa si vince il gioco.
Calcolare
1) la probabilità di vincere il gioco,
2) la probabilità che siano state estratte palline dello stesso colore sapendo che il gioco è stato vinto.

ESERCIZIO 4 Paolo, Matteo e Irene frequentano la terza elementare. Nella loro classe vi sono 22 studenti. Una mattina la maestra decide di organizzare una partita di calcio e quindi divide la classe a caso in 2 squadre da 11 bambini.
Determinare la probabilità dei seguenti eventi:
1) Paolo, Matteo e Irene giocano nella stessa squadra,
2) Paolo e Matteo giocano in squadre differenti.

25

Calcolo delle Probabilità. Esonero parziale 6/11/06
TRACCE DELLE SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

Definiamo lo spazio campionario

$$S = \{ \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} \ : \ x_i \text{ distinti }, \ x_i \in M\}$$

dove M denota il mazzo da 40 carte. Per simmetria, S ha esiti equiprobabili. Quindi $P(E) = |E|/|S|$ per ogni evento $E \subset S$. Inoltre, $|S| = \binom{40}{5}$.

1) $p_1 = \frac{4\binom{10}{5}}{\binom{40}{5}}$. Idea: 4 modi per scegliere il seme, $\binom{10}{5}$ possibili esiti con carte di un dato seme.

2) Sia E l'evento che le 5 carte sono dello stesso seme e sia F l'evento che sono stati estratti il 2 e il 4 di denari. Bisogna calcolare $P(E|F)$.

$$P(E|F) = P(E \cap F)/P(F) = |E \cap F|/|F|.$$

Abbiamo $|E \cap F| = \binom{8}{3}$ (idea: dobbiamo scegliere 3 carte tra le 8 carte di denari diverse da 3 e 4), mentre $|F| = \binom{38}{3}$ (idea: dobbiamo scegliere 3 carte tra le 38 carte diverse da 3 e 4 di denari). Quindi

$$P(E|F) = \frac{\binom{8}{3}}{\binom{38}{3}}.$$

3) Contiamo gli esiti con esattamente 3 assi: abbiamo 4 modi per fissare i 3 assi e $\binom{36}{2}$ modi per fissare le 2 carte che non sono assi. Quindi gli esiti con esattamente 3 assi sono $4\binom{36}{2}$ e

$$p_3 = \frac{4\binom{36}{2}}{\binom{40}{5}}.$$

4) Abbiamo 10 modi per fissare il valore. Dato il valore, dobbiamo scegliere 1 carta tra le 36 rimanenti che non hanno il valore fissato. Quindi

$$p_4 = \frac{10 \cdot 36}{\binom{40}{5}}.$$

ESERCIZIO 2

Negli eventi di cui bisogna calcolare la probabilità conta solo il numero di caramelle date ad ogni singolo bambino. Numeriamo i bambini in modo che Andrea sia il primo bambino e denotiamo x_i il numero di caramelle ricevute dal bambino i–esimo. Allora possiamo prendere come spazio campionario

$$S = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \ : \ x_i \text{ intero }, \ x_i \geqslant 1, \ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16\} \ .$$

Per simmetria, gli esiti di S sono equiprobabili (indipendentemente dal fatto che le caramelle siano uguali o meno!!).

Nel seguito useremo ripetutamente il seguente fatto: il numero di soluzioni intere non negative dell'equazione

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$$

è pari a

$$\binom{n+k-1}{k-1}.$$

26

Mappando (x_1, x_2, x_3, x_4) in $(x_1 - 1, x_2 - 1, x_3 - 1, x_4 - 1)$ abbiamo che
$$|S| = |S'|$$
dove
$$S' = \{\, (y_1, y_2, y_3, y_4) \,:\, y_i \text{ intero }, \; y_i \geqslant 0, \; y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 12\} \;.$$
Quindi
$$|S| = \binom{15}{3} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35 \cdot 13.$$
1) Dobbiamo calcolare $P(E_1)$ dove
$$E_1 = \{\, (x_1, x_2, x_3, x_4) \,:\, x_i \text{ intero }, \; x_i \geqslant 3, \; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16\} \;.$$
Mappando (x_1, x_2, x_3, x_4) in $(x_1 - 3, x_2 - 3, x_3 - 3, x_4 - 3)$ abbiamo che $|E_1| = |E_1'|$ dove
$$E_1' = \{\, (y_1, y_2, y_3, y_4) \,:\, y_i \text{ intero }, \; y_i \geqslant 0, \; y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 4\} \;.$$
Quindi
$$|E_1| = |E_1'| = \binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$$
In particolare,
$$P(E_1) = \frac{|E_1|}{|S|} = \frac{35}{35 \cdot 13} = \frac{1}{13}$$
2) Dobbiamo calcolare $P(E_2)$ dove
$$E_2 = \{\, (x_1, x_2, x_3, x_4) \,:\, x_i \text{ intero }, \; x_1 \geqslant 3, x_2 \geqslant 1, x_3 \geqslant 1, x_4 \geqslant 1 \; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16\} \;.$$
Mappando (x_1, x_2, x_3, x_4) in $(x_1 - 3, x_2 - 1, x_3 - 1, x_4 - 1)$ abbiamo che $|E_2| = |E_2'|$ dove
$$E_2' = \{\, (y_1, y_2, y_3, y_4) \,:\, y_i \text{ intero }, \; y_i \geqslant 0, \; y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 10\} \;.$$
Quindi
$$|E_2| = |E_2'| = \binom{13}{3} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 13 \cdot 22.$$
In particolare,
$$P(E_2) = \frac{13 \cdot 22}{35 \cdot 13} = \frac{22}{35}.$$
3) Dobbiamo calcolare $P(E_3)$ dove
$$E_3 = \{\, (x_1, x_2, x_3, x_4) \,:\, x_i \text{ intero }, \; x_1 = 3, x_2 \geqslant 1, x_3 \geqslant 1, x_4 \geqslant 1, \; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16\} \;.$$
Mappando $(3, x_2, x_3, x_4)$ in $(x_2 - 1, x_3 - 1, x_4 - 1)$ abbiamo che $|E_3| = |E_3'|$ dove
$$E_3' = \{\, (y_2, y_3, y_4) \,:\, y_i \text{ intero }, \; y_i \geqslant 0, \; y_2 + y_3 + y_4 = 10\} \;.$$
Quindi
$$|E_2| = |E_2'| = \binom{12}{2} = \frac{12 \cdot 11}{1 \cdot 2} = 6 \cdot 11.$$
In particolare,
$$P(E_3) = \frac{11 \cdot 6}{35 \cdot 13} = \frac{66}{455}.$$

ESERCIZIO 3

Consideriamo i seguenti eventi:

F = "le palline estratte hanno lo stesso colore",

$E =$ "il gioco viene vinto".
Abbiamo

$$P(F) = \frac{\binom{5}{3} + \binom{4}{3} + 1}{\binom{12}{3}} = \frac{3}{44} \tag{0.1}$$

$$P(F^c) = 1 - P(F) = \frac{41}{44} \tag{0.2}$$

$$P(E|F) = 3/4 \tag{0.3}$$

$$P(E|F^c) = 1/2. \tag{0.4}$$

1)

$$P(E) = P(E|F)P(F) + P(E|F^c)P(F^c) = \frac{3}{4}\frac{3}{44} + \frac{1}{2}\frac{41}{44} = \frac{91}{4 \cdot 44} = \frac{91}{176}.$$

2) Per il teorema di Bayes

$$P(F|E) = \frac{P(E|F)P(F)}{P(E)} = \frac{\frac{3}{4}\frac{3}{44}}{\frac{91}{4 \cdot 44}} = \frac{9}{91}$$

ESERCIZIO 4
Come spazio campionario S prendiamo le ripartizioni della classe in 2 squadre con 11 studenti ciascuna. Gli esiti sono equiprobabili. Inoltre

$$|S| = \frac{1}{2}\binom{22}{11, 11} = \frac{1}{2}\binom{22}{11}.$$

(nota: le due squadre sono equivalenti, da cui il fattore 1/2).
1) dobbiamo contare le ripartizioni in cui Paolo, Matteo e Irene stanno nella stessa squadra. Queste sono univocalmente determinate se scegliamo gli altri 8 studenti che stanno in squadra con Paolo, Matteo e Irene. Abbiamo $\binom{19}{8}$ scelte possibili. Quindi:

$$p_1 = \frac{\binom{19}{8}}{\frac{1}{2}\binom{22}{11}}$$

2) dobbiamo contare le ripartizioni in cui Paolo e Matteo stanno in squadre diverse. Queste sono univocalmente determinate se scegliamo i 10 studenti che giocano con Paolo e tra questi non includiamo Matteo. Abbiamo $\binom{20}{10}$ scelte possibili. Quindi:

$$p_2 = \frac{\binom{20}{10}}{\frac{1}{2}\binom{22}{11}}$$

28

Calcolo delle Probabilità. Esonero parziale (15/01/07)
Tempo a disposizione: 1 ora e 30 min.

Nota. In tutti gli esercizi, i risultati finali devono essere in forma di frazioni a/b, con a e b numeri interi esplicitamente calcolati. **Non è cosentito l'uso di calcolatrici**

FORMULARIO

Se X è v.a. binomiale di parametri n, p, allora $E(X) = np$, $Var(X) = np(1-p)$.
Se X è v.a. geometrica di parametro p, allora $E(X) = 1/p$, $Var(X) = (1-p)/p^2$.
Se X è v.a. di Poisson con parametro λ, allora $E(X) = \lambda$, $Var(X) = \lambda$.
Se X è v.a. ipergeometrica di parametri n, N, m (tipo: estraggo senza rimpiazzo n palline da un'urna con m palline bianche e $N-m$ palline nere e X è il numero di palline bianche estratte) allora $E(X) = nm/N$ e $Var(X) = \frac{N-n}{N-1}np(1-p)$ dove $p = m/N$.

ESERCIZIO 1
Vi sono tre borghi di montagna: Chaulis, Dierico e Lovea. A Chiaulis vivono 20 ragazzi, 20 adulti e 30 anziani. A Dierico vivono 20 ragazzi, 30 adulti e 20 anziani. A Lovea vivono 20 ragazzi, 40 adulti e 10 anziani.
Al fine di effettuare un sondaggio, vengono contattati a caso 10 persone per ognuno dei suddetti tre borghi (10 a Chiaulis, 10 a Dierico e 10 a Lovea).
Definire X come il numero complessivo di ragazzi contattati, Y come il numero complessivo di adulti contattati e Z come il numero complessivo di anziani contattati.
1) Determinare $E(Y)$, $Var(Y)$.
2) Dire se X, Y, Z sono indipendenti e giustificarne la risposta.

ESERCIZIO 2 Si consideri il seguente gioco a premi. Un'urna contiene 10 palline: 4 verdi, 3 rosse e 3 gialle. Si lancia una moneta truccata per cui la probabilità di avere testa è 1/3 e di avere croce è 2/3. Se esce testa si estrae una pallina dall'urna, mentre se esce croce si estraggono 2 palline senza rimpiazzo dall'urna. Alla fine, si vincono tanti euro quante le palline verdi estratte.
1) Chiamata X la vincita, si determini la densità discreta di X, $E(X)$ e $Var(X)$.
2) Determinare la probabilità che il lancio della moneta abbia dato testa sapendo che al termine del gioco la vincita è pari ad 1 euro.
3) Dopo avere reinserito le palline estratte si ripete il gioco e si continua a giocare fino all'estrazione di 2 palline verdi. Chiamato Y il numero di partite effettuate, determinare $E(Y)$, $Var(Y)$ e la probabilità che $Y = 2$.

ESERCIZIO 3
1) Dire se esistono variabili aleatorie X e Y, con X a valori in $\{0, 1, 2\}$ e Y a valori in $\{-1, 1\}$, la cui densità congiunta è rappresentata dalle entrate della seguente tabella:

$X \backslash Y$	-1	1
0	1/2	0
1	1/6	1/6
2	1/3	1/6

29

(cioè $p_{(X,Y)}(0,-1) = 1/2$, $p_{(X,Y)}(0,1) = 0$, $p_{(X,Y)}(1,-1) = 1/6$,...).
In caso affermativo determinare la densità discreta di X, la densità discreta di Y, la funzione di distribuzione di X. Calcolare $E(10X + Y)$, $E(10X + Y^2)$, $E(X^2Y + 5)$, $Var(X + 2Y)$. Inoltre dire se X e Y sono indipendenti e giustificarne la risposta.
2) Ripetere l'esercizio al punto 1) considerando come nuova densità congiunta quella rappresentata dalle entrate della seguente tabella:

$X \setminus Y$	-1	1
0	1/2	1/6
1	1/6	0
2	0	1/6

30

Calcolo delle Probabilità. Esonero parziale 15/01/07
TRACCE DELLE SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

1) $Y = Y_1+Y_2+Y_3$ dove Y_1, Y_2 e Y_3 denotano rispettivamente il numero di adulti contattati a Chiaulis, Dierico e Lovea. Y_i è v.a. ipergeometrica di parametri n_i, m_i, N_i dati da:
$n_1 = 10$, $m_1 = 20$, $N_1 = 70$,
$n_2 = 10$, $m_2 = 30$, $N_2 = 70$,
$n_3 = 10$, $m_3 = 40$, $N_3 = 70$,
Quindi $E(Y_1) = 20/7$, $E(Y_2) = 30/7$, $E(Y_3) = 40/7$,
$Var(Y_1) = \frac{200}{23}\frac{10}{49}$, $Var(Y_2) = \frac{200}{23}\frac{12}{49}$, $Var(Y_3) = \frac{200}{23}\frac{12}{49}$.
Possiamo concludere che

$$E(Y) = E(Y_1) + E(Y_2) + E(Y_3) = 90/7.$$

Inoltre essendo Y_1, Y_2, Y_3 indipendenti abbiamo

$$Var(Y) = Var(Y_1) + Var(Y_2) + Var(Y_3) = \frac{200}{23}\frac{34}{49} = \frac{6800}{1127}.$$

2) X, Y, Z soddisfano $X + Y + Z = 30$. Quindi $P(X = 0, Y = 0, Z = 0) = 0$, mentre si ha che $P(X = 0), P(Y = 0), P(Z = 0)$ sono positive. Quindi

$$P(X = 0, Y = 0, Z = 0) \neq P(X = 0)P(Y = 0)P(Z = 0)\,.$$

Questo implica che X, Y, Z sono dipendenti.

ESERCIZIO 2

1) X assume solo valori $0, 1, 2$.
Consideriamo gli eventi: T="esce testa", C="esce croce".

$$P(X = a) = P(X = a|T)P(T)+P(X = a|C)P(C) = (1/3)P(X = a|T)+(2/3)P(X = a|C)$$

Inoltre si ha
$P(X = 0|T) = 6/10 = 3/5$, $P(X = 1|T) = 2/5$
$P(X = 0|C) = \binom{6}{2}/\binom{10}{2} = 15/45 = 1/3$
$P(X = 1|C) = \binom{4}{1}\binom{6}{1}/\binom{10}{2} = 4 \cdot 6/45 = 8/15$,
$P(X = 2|C) = \binom{4}{2}/\binom{10}{2} = 6/45 = 2/15$
Quindi
$P(X = 0) = (1/3)(3/5) + (2/3)(1/3) = (9 + 19)/45 = 19/45$
$P(X = 1) = (1/3)(2/5) + (2/3)(8/15) = (6 + 16)/45 = 22/45$
$P(X = 2) = (2/3)(2/15) = 4/45$.
In conclusione

$$p_X(a) = \begin{cases} 19/45 & \text{se } a = 0, \\ 22/45 & \text{se } a = 1, \\ 4/45 & \text{se } a = 2, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$E(X) = 22/45 + 2 \cdot 4/45 = 30/45 = 2/3$.
$E(X^2) = 22/45 + 4 \cdot 4/45 = 38/45$.
$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 38/45 - 4/9 = 18/45 = 2/5$.
2) Per il Teorema di Bayes

$$P(T|X = 1) = \frac{P(X = 1|T)P(T)}{P(X = 1)} = (2/5)(1/3)/(22/45) = 3/11$$

31

3) Y è v.a. geometrica di parametro $p = P(X = 2) = 4/45$. Quindi

$E(Y) = 1/p = 45/4, \qquad Var(Y) = (1-p)/p^2 = (41/45)(45/4)^2 = 41 \cdot 45/16 = 1845/16$

e $P(Y = 2) = (1-p)p = (41/45)(4/45) = 164/2025$.

ESERCIZIO 3

1) X, Y non esistono in quanto la somma delle entrate della tabella non dà 1.

2) X, Y esistono in quanto la somma delle entrate della tabella dà 1 e ogni entrata è a valori in $[0, 1]$.

$$p_X(a) = \begin{cases} 2/3 & \text{se } a = 0, \\ 1/6 & \text{se } a = 1, \\ 1/6 & \text{se } a = 2, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$p_Y(a) = \begin{cases} 2/3 & \text{se } a = -1, \\ 1/3 & \text{se } a = 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$F_X(a) = \begin{cases} 0 & \text{se } a < 0, \\ 2/3 & \text{se } 0 \leqslant a < 1, \\ 5/6 & \text{se } 1 \leqslant a < 2, \\ 1 & \text{se } a \geqslant 2. \end{cases}$$

Alcuni calcoli preliminari:
$E(X) = 1/6 + 2/6 = 1/2$, $E(Y) = -2/3 + 1/3 = -1/3$, $E(X^2) = 1/6 + 4/6 = 5/6$, $E(Y^2) = 1$, $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 5/6 - 1/4 = 7/12$,
$Var(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = 1 - 1/9 = 8/9$, $E(XY) = -1/6 + 2/6 = 1/6$, $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 1/6 - (1/2)(-1/3) = 1/3$, $E(X^2Y) = -1/6 + 4/6 = 1/2$.
Quindi, per la linearità di $E(\cdot)$

$$E(10X + Y) = 10E(X) + E(Y) = 5 - 1/3 = 14/3$$
$$E(10X + Y^2) = 10E(X) + E(Y^2) = 5 + 1 = 6$$
$$E(X^2Y + 5) = E(X^2Y) + 5 = 1/2 + 5 = 11/2$$

$$Var(X+2Y) = Var(X)+Var(2Y)+2Cov(X, 2Y) = Var(X)+4Var(Y)+4Cov(X, Y) = 7/12 + 32/9 + 4/3 = (21 + 128 + 48)/36 = 197/36$$

X e Y non sono indipendenti infatti $Cov(X, Y) \neq 0$. Oppure si può osservare che

$$P(X = 0, Y = -1) = 1/2 \neq (2/3)(2/3) = P(X = 0)P(Y = -1).$$

Nota: in tutto l'esame, gli unici calcoli "impegnativi " consistevano nel calcolo di $23 \cdot 49$, $45 \cdot 45$, $21 + 128 + 48$. In tutti gli altri casi bastava semplificare e quindi ridursi a prodotti e somme del tipo $2 \cdot 3$ o $2 + 3$. Eppure la maggior parte degli studenti è stata incapace di presentare un testo con calcoli completi e corretti. Il calcolo con le frazioni dovrebbe essere noto dai tempi delle scuole medie...

Calcolo delle Probabilità. Esame scritto (29/01/07)
Tempo a disposizione: 2 ore e 30 min.

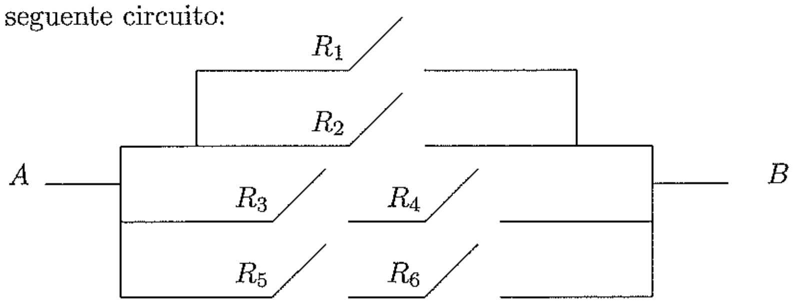
NOTA. Nell'esercizio 2 i risultati possono essere dati come espressioni algebriche eventualmente contenenti fattoriali e coefficienti binomiali (quindi non è necessario svolgere tutti i calcoli).
In tutti gli altri esercizi, i risultati finali devono essere in forma di frazioni a/b, con a e b numeri interi esplicitamente calcolati.
Non è cosentito l'uso di calcolatrici.

FORMULARIO

Se X è v.a. binomiale di parametri n, p, allora $E(X) = np$, $Var(X) = np(1-p)$.
Se X è v.a. geometrica di parametro p, allora $E(X) = 1/p$, $Var(X) = (1-p)/p^2$.
Se X è v.a. di Poisson con parametro λ, allora $E(X) = \lambda$, $Var(X) = \lambda$.
Se X è v.a. ipergeometrica di parametri n, N, m (tipo: estraggo senza rimpiazzo n palline da un'urna con m palline bianche e $N-m$ palline nere e X è il numero di palline bianche estratte) allora $E(X) = nm/N$ e $Var(X) = \frac{N-n}{N-1}np(1-p)$ dove $p = m/N$.

ESERCIZIO 1

Considerare il seguente circuito:



Ogni relè (interruttore) $R_1, R_2, \ldots, R_6$ è chiuso con probabilità $1/3$, indipendentemente dagli altri.
1) Determinare la probabilità che passi corrente da A a B.
2) Determinare la probabilità che R_3, R_4 siano chiusi sapendo che passa corrente da A a B.
3) Chiamato X il numero di relè chiusi, determinare $E(X)$, $E(X^2)$.

ESERCIZIO 2

Da un mazzo di 40 carte si estraggono 4 carte senza rimpiazzo. Determinare:
1) la probabilità di estrarre l'asso di bastoni e l'asso di denari,
2) la probabilità di estrarre esattamente 3 assi,
3) la probabilità di estrarre 0 assi sapendo che una delle carte estratte è il 7 di bastoni,
4) la probabilità di estrarre almeno un asso sapendo che una delle carte estratte è il 7 di bastoni,
5) la probabilità di estrarre 2 coppie di carte delle stesso seme (cioè 2 carte sono delle stesso seme, le restanti 2 carte sono dello stesso seme e i semi delle 2 coppie sono diversi),
6) la probabilità di estrarre 3 carte dello stesso seme e la restante carta di un seme diverso.

33

ESERCIZIO 3

Si consideri il seguente gioco.

Un'urna contiene 3 palline rosse, 2 palline gialle e 1 pallina verde. Si estraggono 2 palline senza rimpiazzo. Si perde 1 euro per ogni pallina rossa estratta, si vincono 2 euro per ogni pallina gialla estratta e si vincono 5 euro per ogni pallina verde estratta.

Si definiscano X_1, X_2, X_3 rispettivamente come il numero di palline rosse estratte, il numero di palline gialle estratte e il numero di palline verdi estratte. Inoltre, sia X la vincita totale.

1) Determinare la densità congiunta di X_1, X_2, X_3.
2) Calcolare $E(X), Var(X)$ e $E(X_1 \cdot X_2)$.
3) Dire se X_1, X_2 sono indipendenti e giustificarne la risposta.
4) Dire se X_1, X_2, X_3 sono indipendenti e giustificarne la risposta.
5) Supponendo di ripetere il gioco (reinserendo ogni volta le palline estratte) fino a quando la pallina verde viene estratta, determinare il valor medio di giocate complessivamente effettuate.

ESERCIZIO 4

Dire se esistono variabili aleatorie X e Y, con X a valori in $\{-3, 3\}$ e Y a valori in $\{-3, 0, 3\}$, la cui densità congiunta è rappresentata dalle entrate della seguente tabella:

$X \backslash Y$	-3	0	3
-3	$8/18$	$2/18$	$2/18$
3	$4/18$	$1/18$	$1/18$

(cioè $p_{(X,Y)}(-3,-3) = 8/18$, $p_{(X,Y)}(-3,0) = 2/18$, $p_{(X,Y)}(-3,3) = 2/18$,...).

In caso affermativo determinare la densità discreta di X, la densità discreta di Y, la funzione di distribuzione di Y. Calcolare $E(3X-Y)$, $E(X^3+Y)$, $E(X^2Y^2+1)$, $Var(2X-2Y)$. Inoltre dire se X e Y sono indipendenti e giustificarne la risposta.

Calcolo delle Probabilità. Esame (29/01/07). Tracce delle soluzioni

ESERCIZIO 1

Considerare gli eventi:
E_1="almeno uno tra R_1 e R_2 è chiuso"
E_2="R_3 e R_4 sono chiusi"
E_3="R_5 e R_6 sono chiusi"
E="passa corrente da A a B".
Si noti che $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$.
Per l'indipendenza:
$P(E_1) = 1 - P(E_1^1) = 1 - (2/3)^2 = 5/9$,
$P(E_2) = (1/3)^2 = 1/9$,
$P(E_3) = (1/3)^2 = 1/9$.
1) Per il principio inclusione–esclusione e poi per l'indipendenza

$$\begin{aligned} P(E) = P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_1 \cap E_2) \\ - P(E_1 \cap E_3) - P(E_2 \cap E_3) + P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \\ P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_1)P(E_2) - P(E_1)P(E_3) - P(E_2)P(E_3) \\ + P(E_1)P(E_2)P(E_3). \end{aligned} \tag{0.1}$$

Quindi

$$\begin{aligned} P(E) &= 5/9 + 1/9 + 1/9 - (5/9)(1/9) - (5/9)(1/9) - (1/9)(1/9) + (5/9)(1/9)(1/9) \\ &= 7/9 - 11/81 + 5/729 = (7 \cdot 81 - 11 \cdot 9 + 4)/729 = 473/729 \end{aligned}$$

Altro metodo.

$$\begin{aligned} &P(E) = 1 - P(E^c) = 1 - P(E_1^c \cap E_2^c \cap E_3^c) = 1 - P(E_1^c)P(E_2^c)P(E_3^c) \\ &= 1 - P(E_1^c)(1 - P(E_2))(1 - P(E_3)) = 1 - (4/9)(8/9)(8/9) = (729 - 256)/729 = 473/729. \end{aligned}$$

2)

$$P(E_2|E) = P(E \cap E_2)/P(E) = P(E_2)/P(E) = (1/9)/(473/279) = 81/473$$

3) $X = Bin(6, 1/3)$. Dal formulario $E(X) = 6/3 = 2$, $Var(X) = 6(1/3)(2/3) = 4/3$. Quindi $E(X^2) = Var(X) + E(X)^2 = 4/3 + 4 = 16/3$.

ESERCIZIO 2 Chiamiamo p_i la probabilità al punto i–esimo. Allora

$$p_1 = \frac{\binom{38}{2}}{\binom{40}{4}}, \qquad p_2 = \frac{\binom{4}{3}36}{\binom{40}{4}}$$

Definiti gi eventi E="vengono estratti 0 assi" e F="viene estratto il 7 di bastoni" si ha

$$p_3 = P(E|F) = P(E \cap F)/P(F) = \frac{\binom{35}{3}}{\binom{39}{3}}$$

Inoltre

$$\begin{aligned} &p_4 = P(E^c|F) = P(E^c \cap F)/P(F) = P(F - E \cap F)/P(F) = \\ &(P(F) - P(E \cap F))/P(F) = 1 - P(E \cap F)/P(F) = 1 - p_3 = 1 - \frac{\binom{35}{3}}{\binom{39}{3}} \end{aligned}$$

35

Infine,

$$p_5 = \frac{\binom{4}{2}\binom{10}{2}\binom{10}{2}}{\binom{40}{4}}, \qquad p_6 = \frac{4 \cdot 3 \cdot \binom{10}{3}\binom{10}{1}}{\binom{40}{4}}$$

ESERCIZIO 3.

1) I possibili valori assunti da (X_1, X_2, X_3) sono (2,0,0), (0,2,0), (1,1,0), (1,0,1), (0,1,1).

$$p_{X_1,X_2,X_3}(2,0,0) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{6}{2}} = 3/15, \tag{0.2}$$

$$p_{X_1,X_2,X_3}(0,2,0) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{6}{2}} = 1/15, \tag{0.3}$$

$$p_{X_1,X_2,X_3}(1,1,0) = \frac{3 \cdot 2}{\binom{6}{2}} = 6/15, \tag{0.4}$$

$$p_{X_1,X_2,X_3}(0,1,1) = \frac{2 \cdot 1}{\binom{6}{2}} = 2/15, \tag{0.5}$$

$$p_{X_1,X_2,X_3}(1,0,1) = \frac{3 \cdot 1}{\binom{6}{2}} = 3/15. \tag{0.6}$$

2) Indichiamo nella seguente tabella i possibili valori congiunti di X_1, X_2, X_3, la probabilità congiunta associata, il corrispondente valore assunto da X, da X^2 e da X_1X_2 $(X = -X_1 + 2X_1 + 5X_2)$.

X_1	X_2	X_3	p_{X_1,X_2,X_3}	X	X^2	X_1X_2
2	0	0	3/15	-2	4	0
0	2	0	1/15	4	16	0
1	1	0	6/15	1	1	1
0	1	1	2/15	7	49	0
1	0	1	3/15	4	16	0

Quindi

$$E(X) = -2(3/15) + 4(1/15) + 1(6/15) + 7(2/15) + 4(3/15) = 2$$

$$E(X^2) = 4(3/15) + 16(1/15) + 1(6/15) + 49(2/15) + 16(3/15) = 2180/15 = 12$$

Quindi

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 12 - 4 = 8$$

Inoltre $E(X_1X_2) = p_{X_1,X_2,X_3}(1,1,0) = 6/15$.

3) X_1 e X_2 non sono indipendenti in quanto $P(X_1 = 2, X_2 = 2) = 0$ mentre $P(X_1 = 2) > 0, P(X_2 = 2) > 0$ perciò

$$P(X_1 = 2, X_2 = 2) \neq P(X_1 = 2)P(X_2 = 2)$$

4) X_1, X_2, X_3 non sono indipendenti in quanto ciò implicherebbe l'indipendenza di X_1 e X_2.

5) chiamato T il numero di giocata effettuate, T è v.a. geometrica di parametro

$$p = p_{X_1,X_2,X_3}(1,0,1) + p_{X_1,X_2,X_3}(0,0,1) = 2/15 + 3/15 = 1/3$$

Quindi $E(T) = 1/p = 3$

ESERCIZIO 4

X, Y esistono in quanto le entrate della tabella sono a valori in $[0,1]$ e la loro somma vale 1.

$$p_X(a) = \begin{cases} 2/3 & \text{se } a = -3, \\ 1/3 & \text{se } a = 3, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$p_Y(a) = \begin{cases} 2/3 & \text{se } a = -3, \\ 1/6 & \text{se } a = 0, \\ 1/6 & \text{se } a = 3, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$F_Y(a) = \begin{cases} 0 & \text{se } a < -3, \\ 2/3 & \text{se } -3 \leqslant a < 0, \\ 5/6 & \text{se } 0 \leqslant a < 3, \\ 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Calcoletti utili:
$E(X) = (-3)(2/3) + 3(1/3) = -1$,
$E(Y) = (-3)(2/3) + 3(1/6) = -3/2$,
$E(X^3) = -27(2/3) + 27(1/3) = -9$,
$E(X^2Y^2) = 81(8/18 + 2/18 + 4/18 + 1/18) = 9 \cdot 15/2 = 135/2$
$E(X^2) = 9$, $E(Y^2) = 9(2/3 + 1/6) = 15/2$
$Var(X) = 9 - 1 = 8$, $Var(Y) = 15/2 - 9/4 = 21/4$
Quindi

$$E(3X - Y) = 3E(X) - E(Y) = -3/2$$
$$E(X^3 + Y) = E(X^3) + E(Y) = -21/2$$
$$E(X^2Y^2 + 1) = E(X^2Y^2) + 1 = 135/2 + 1 = 137/2$$

X, Y sono indipendenti poichè $p_{(X,Y)}(a,b) = p_X(a)p_Y(b)$ per ogni $a \in \{-3, 3\}$, $b \in \{-3, 0, 3\}$. In particolare

$Var(2X - 2Y) = 4Var(X - Y) = 4Var(X) + 4Var(-Y) = 4Var(X) + 4Var(Y) = 4(8 + 21/4) = 53$

Calcolo delle Probabilità. Esame scritto (14/02/07)
Tempo a disposizione: 2 ore

FORMULARIO

Se X è v.a. binomiale di parametri n, p, allora $E(X) = np$, $Var(X) = np(1-p)$.
Se X è v.a. geometrica di parametro p, allora $E(X) = 1/p$, $Var(X) = (1-p)/p^2$.
Se X è v.a. di Poisson con parametro λ, allora $E(X) = \lambda$, $Var(X) = \lambda$.
Se X è v.a. ipergeometrica di parametri n, N, m (tipo: estraggo senza rimpiazzo n palline da un'urna con m palline bianche e $N-m$ palline nere e X è il numero di palline bianche estratte) allora $E(X) = nm/N$ e $Var(X) = \frac{N-n}{N-1}np(1-p)$ dove $p = m/N$.

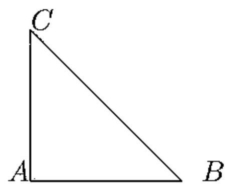
NOTA. Nell'esercizio 1, punti 1),2) e 3), i risultati possono essere dati come espressioni algebriche eventualmente contenenti fattoriali e coefficienti binomiali (quindi non è necessario svolgere tutti i calcoli).
Ad eccezione dei punti 1),2) e 3) dell'esercizio 1, i risultati finali devono essere in forma di frazioni a/b, con a e b numeri interi esplicitamente calcolati.
Non è consentito l'uso di calcolatrici.

ESERCIZIO 1.

Si estraggono senza rimpiazzo 4 carte da un mazzo da 52 carte. Si vince 1 euro per ogni carta di quadri estratta, 2 euro per ogni carta di picche estratta, 3 euro per ogni carta di fiori estratta e si perdono 4 euro per ogni carta di cuori estratta.
Determinare:
1) la probabilità di avere carte tutte di seme diverso.
2) la probabilità di avere carte tutte di seme diverso sapendo che è stata estratta esattamente una carta di fiori.
3) la probabilità di avere carte tutte di seme diverso sapendo che è stata estratta almeno una carta di fiori.
4) Determinare la vincita media.

ESERCIZIO 2.

Si consideri il triangolo ABC:



Ogni lato viene colorato di rosso o giallo o verde indipendentemente dagli altri lati. La probabilità che un dato lato venga colorato di rosso è 4/6, di giallo è 1/6, di verde è 1/6. Si considerino le variabili aleatorie X, Y, Z definite come segue: X è il numero di lati rossi, Y è il numero di lati gialli, Z è il numero di lati verdi.
1) determinare la probabilità che tutti i lati siano dello stesso colore,
2) determinare la probabilità che tutti i lati siano di colore diverso l'uno dall'altro,

38

3) determinare la densità congiunta di X, Y, Z,
4) dire se X è variabile aleatoria speciale e determinare $Var(X)$,
5) dire se X, Y e Z sono variabili aleatorie indipendenti giustificando la risposta.

ESERCIZIO 3.
1) Dire se esiste una v.a. Z a valori $\{-1, 2, 4\}$ la cui densità discreta è

$$p_Z(-1) = 0.1, \qquad p_Z(2) = 0.4, \qquad p_Z(4) = 0.5$$

(giustificare la risposta).
2) Dire se esiste una v.a. Z a valori $\{0, 1, 10\}$ la cui densità discreta è

$$p_Z(0) = 0.2, \qquad p_Z(1) = 0.4, \qquad p_Z(10) = 0.5,$$

(giustificare la risposta).
3) Dire se esistono (giustificando la risposta) variabili aleatorie X e Y, con X a valori in $\{-10, 0, 10\}$ e Y a valori in $\{1, 2\}$, la cui densità congiunta è rappresentata dalle entrate della seguente tabella:

$X \backslash Y$	1	2
-10	$1/10$	0
0	$3/10$	$2/10$
10	$3/10$	$1/10$

(cioè $p_{(X,Y)}(-10, 1) = 1/10$, $p_{(X,Y)}(0, 1) = 3/10$, $p_{(X,Y)}(10, 1) = 3/10$,...).
In caso affermativo determinare la densità discreta di X, la densità discreta di Y, la funzione di distribuzione di Y. Calcolare $E(X - 3Y)$, $E(XY^3 - 2Y^2)$, $Var(2X - 3Y)$. Inoltre dire se X e Y sono indipendenti e giustificarne la risposta.

39

Calcolo delle Probabilità. Esame scritto (14/02/07)
TRACCE DELLE SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

Consideriamo gli eventi:
E="le carte sono tutte di seme diverso",
F="è stata estratta una carta di fiori",
G="è stata estratta almeno una carta di fiori".
Come spazio campionario prendiamo

$$S = \{\{x_1, x_2, x_3, x_4\} \,:\, x_i \in M,\ x_i \text{ distinti}\}$$

dove M denota il mazzo. S ha esiti equiprobabili.
1) $p(E) = \frac{13^4}{\binom{52}{4}}$,
2) $p(E|F) = |E \cap F|/|F| = |E|/|F| = \frac{13^4}{13\binom{39}{3}}$,
3) $p(E|G) = |E \cap G|/|G| = |E|/|G| = \frac{13^4}{\sum_{j=1}^{4}\binom{13}{j}\binom{39}{4-j}}$
Equivalentemente:
$p(E|G) = |E \cap G|/|G| = |E|/|G| = |E|/(|S| - |G^c|) = \frac{13^4}{\binom{52}{4}-\binom{39}{4}}$.
4) Definiamo X, Y, Z, W come il numero di carte rispettivamente di quadri, di picche, di fiori e di cuori estratte. La vincita V è data da

$$V = X + 2Y + 3Z - 4W\,.$$

X, Y, Z, W sono variabili ipergeometriche tutte di parametri $N = 52$, $n = 4$, $m = 13$. Quindi

$$E(X) = E(Y) = E(Z) = E(W) = 4 \cdot 13/52 = 1\,.$$

Ne deriva che

$$E(V) = E(X) + 2E(Y) + 3E(Z) - 4E(W) = 1 + 2 + 3 - 4 = 2\,.$$

ESERCIZIO 2

1) Bisogna distinguere i tre casi: tutti i lati sono rossi, tutti i lati sono gialli, tutti i lati sono verdi. quindi

$$p_1 = (4/6)^3 + (1/6)^3 + (1/6)^3 = 66/216.$$

2) Vi possono essere $3! = 6$ casi: es. AB è rosso, BC è giallo, AC è verde, oppure AB è giallo, BC è rosso, AC è verde, e cosi' via. Ogni caso ha probabilità $(4/6)(1/6)(1/6) = 4/6^3$. Quindi

$$p_2 = 6(4/6^3) = 4/36$$

3) I possibili valori di (X,Y,Z) sono dati dalle terne (a,b,c) con a,b,c numeri interi non negativi tali che $a + b + c = 3$. Inoltre

$$p_{X,Y,Z}(a, b, c) = \binom{3}{a, b, c}(4/6)^a(1/6)^b(1/6)^c.$$

Nella seguente tabella indichiamo tutti i valori possibili di (X, Y, Z) e la relativa densità congiunta:

40

X	Y	Z	$p_{X,Y,Z}$
3	0	0	$(4/6)^3 = 64/216$
2	1	0	$3(4/6)^2(1/6) = 48/216$
2	0	1	$3(4/6)^2(1/6) = 48/216$
1	2	0	$3(4/6)(1/6)^2 = 12/216$
1	0	2	$3(4/6)(1/6)^2 = 12/216$
1	1	1	$3!(4/6)(1/6)^2 = 24/216$
0	2	1	$3(1/6)^3 = 3/216$
0	1	2	$3(1/6)^3 = 3/216$
0	3	0	$(1/6)^3 = 1/216$
0	0	3	$(1/6)^3 = 1/216$

4) X è binomiale di parametri $n = 3$, $p = 4/6$ quindi $E(X) = np(1-p) = 4/6$.
5) X, Y, Z non sono indipendenti in quanto deve essere $X+Y+Z = 3$, quindi $P(X = 3, Y = 3, Z = 3) = 0$ non può uguagliare $P(X = 3)P(Y = 3)P(Z = 3) = (4/6)^3(1/6)^3(1/6)^3$

ESERCIZIO 3

1) Z esiste in quanto $\sum_x p_Z(x) = 1$ e $p_Z(x) \in [0,1]$, dove x varia tra i possibili valori di Z.
2) Z non esiste in quanto $\sum_x p_Z(x) = 1.1$.
3) X, Y esistono in quanto le entrate della tabella sono a valori in $[0,1]$ e la loro somma vale 1.

$$p_X(a) = \begin{cases} 1/10 & \text{se } a = -10, \\ 5/10 & \text{se } a = 0, \\ 4/10 & \text{se } a = 10, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$p_Y(a) = \begin{cases} 7/10 & \text{se } a = 1, \\ 3/10 & \text{se } a = 2, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$F_Y(a) = \begin{cases} 0 & \text{se } a < 1, \\ 7/10 & \text{se } 1 \leqslant a < 2, \\ 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Calcoli utili:
$E(X) = (-10)(1/10) + 10(4/10) = 3$
$E(Y) = 1(7/10) + 2(3/10) = 13/10$
$E(XY^3) = (-10)1^3(1/10) + 10(1^3)(3/10) + 10(2^3)(1/10) = 100/10 = 10$
$E(Y^2) = (1^2)(7/10) + 2^2(3/10) = 19/10$
$E(X^2) = 100(1/10) + 100(4/10) = 50$
$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 50 - 3^2 = 41$
$Var(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = 19/10 - (13^2)/100 = (190 - 169)/100 = 21/100$
$E(XY) = (-10)(1)(1/10) + (10)(1)(3/10) + (10)(2)(1/10) = 40/10 = 4$
$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 4 - 3(13/10) = 1/10$

Otteniamo
a) $E(X - 3Y) = E(X) - 3E(Y) = 3 - 39/10 = -9/10$,
b) $E(XY^3 - 2Y^2) == E(XY^3) - 2E(Y^2) = 10 - 2(19/10) = (100 - 38)/10 = 62/10$,
c) $Var(2X - 3Y) = Var(2X) + Var(-3Y) + 2Cov(2X, -3Y) =$
$4Var(X) + 9Var(Y) - 12Cov(X, Y) = 4(41) + 9(21/100) - 12(1/10) = (16400 + 189 - 120)/100 = 16469/100$

X, Y non possono essere indipendenti in quanto $Cov(X, Y) \neq 0$.

Calcolo delle Probabilità. Esame scritto (27/06/07)
Tempo a disposizione: 2 ore.

Nota. In tutti gli esercizi, tranne che per i punti (2) e (3) dell'esercizio 2, i risultati finali devono essere in forma di frazioni a/b, con a e b numeri interi ESPLICITAMENTE calcolati. **Non è cosentito l'uso di calcolatrici**

FORMULARIO

Se X è v.a. binomiale di parametri n, p, allora $E(X) = np$, $Var(X) = np(1-p)$.
Se X è v.a. geometrica di parametro p, allora $E(X) = 1/p$, $Var(X) = (1-p)/p^2$.
Se X è v.a. di Poisson con parametro λ, allora $E(X) = \lambda$, $Var(X) = \lambda$.
Se X è v.a. ipergeometrica di parametri n, N, m (tipo: estraggo senza rimpiazzo n palline da un'urna con m palline bianche e $N - m$ palline nere e X è il numero di palline bianche estratte) allora $E(X) = nm/N$ e $Var(X) = \frac{N-n}{N-1}np(1-p)$ dove $p = m/N$.

ESERCIZIO 1

Da un'urna contenente 10 palline numerate da 1 a 10 si estraggono 3 palline, una dopo l'altra e senza rimpiazzo.
Si considerino i seguenti eventi:
E="le prime due palline hanno numeri pari",
F="la terza pallina ha un numero dispari",
G="vengono estratte due palline con numeri pari ed una pallina con numero dispari",
H="viene estratta almeno una pallina con numero pari".
1) Calcolare le probabilità $P(E)$, $P(F)$, $P(G)$, $P(H)$.
2) Dire se E, F, G sono eventi indipendenti e motivarne la risposta,
3) Dire se E, F, G, H sono eventi indipendenti e motivarne la risposta,
Si consideri il seguente gioco a premi: effettuata l'estrazione delle tre palline come sopra si vincono 3 euro se l'evento F si verifica, altrimenti si perdono 2 euro.
4) Determinare la vincita media.
Immaginare di ripetere il gioco a premi fino al verificarsi dell'evento F (dopo ogni giocata, la tre palline estratte vengono reinserite) e sia T il numero di giocate effettuate (inclusa quella vincente).
5) Determinare $E(T)$ e $E(2T^2 + 1)$.

ESERCIZIO 2

Marco partecipa ad un concorso che consiste in 3 test a risposta multipla: un test di diritto, un test di economia ed un test di storia.
Il test di diritto consiste in 10 quesiti e per ogni quesito sono proposte 4 risposte.
Il test di economia consiste in 8 quesiti e per ogni quesito sono proposte 3 risposte.
Il test di storia consiste in 6 quesiti e per ogni quesito sono proposte 2 risposte.
Marco non si è preparato per il concorso e decide di svolgere i tre test scegliendo per ogni quesito la risposta completamente a caso tra quelle proposte.
1) Chiamato X il numero complessivo di risposte corrette date da Marco nei tre test, determinare $E(X)$, $Var(X)$, $Var(10X - 11)$.
2) Determinare la probabilità che Marco abbia risposto esattamente a 0 domande. (È

43

sufficiente dare la soluzione come espressione algebrica, senza svolgere i calcoli).
3) Determinare la probabilità che Marco abbia risposto esattamente ad una sola domanda.
(*È sufficiente dare la soluzione come espressione algebrica, senza svolgere i calcoli*).

ESERCIZIO 3
1) Sia X una variabile aleatoria discreta con funzione di distribuzione F_X data da

$$F_X(a) = \begin{cases} 0 & \text{se } a < -2, \\ 2/8 & \text{se } -2 \leqslant a < 0, \\ 3/8 & \text{se } 0 \leqslant a < 1, \\ 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Determinare la densità discreta p_X di X e calcolare $E(X)$, $E(3X+1)$, $E(3X^2+1)$, $Var(X)$.
2) Dire se esiste (motivandone la risposta) una variabile aleatoria discreta X con funzione di distribuzione F_X data da

$$F_X(a) = \begin{cases} 0 & \text{se } a < -5, \\ 1/5 & \text{se } -5 \leqslant a < 0, \\ 4/5 & \text{se } a \geqslant 0. \end{cases}$$

3) Dire se esistono (motivandone la risposta) variabili aleatorie discrete X e Y, con X a valori in $\{-1, 1\}$ e Y a valori in $\{0, 1, 2\}$, la cui densità congiunta è rappresentata dalle entrate della seguente tabella:

$X \backslash Y$	0	1	2
-1	1/6	2/6	0
1	1/6	1/6	1/6

(cioè $p_{(X,Y)}(-1, 0) = 1/6$, $p_{(X,Y)}(-1, 1) = 2/6$,...).
In caso affermativo determinare la densità discreta di X, la densità discreta di Y, la funzione di distribuzione di X, la funzione di distributione di Y. Calcolare $E(XY^2 + 3X)$, $Cov(X, Y)$, $Cov(2X + 1, Y)$. Inoltre dire se X e Y sono indipendenti e giustificarne la risposta.

Calcolo delle Probabilità. Esame scritto 27/06/07
TRACCE DELLE SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

Consideriamo l'esperimento dato dall'estrazione delle 3 palline. Per simmetria lo spazio campionario $S = \{(x_1, x_2, x_3) : x_i \in \{1, 2, \dots, 10\},\ x_i \text{ distinti}\}$ ha esiti equiprobabili.
$|S| = 10 \cdot 9 \cdot 8$,
$|E| = 5 \cdot 4 \cdot 8$,
$|F| = 5 \cdot 9 \cdot 8$. Idea: fisso x_3 (5 modi possibili), poi fisso x_1 (9 modi possibili), poi fisso x_2 (8 modi possibili).
$|G| = 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4$. Idea: scelgo quale delle tre palline è dispari (3 modi possibili) e fisso il numero (5 modi possibili). poi fisso il numero della prima pallina pari (5 possibili) e poi fisso il numero della seconda pallina pari (4 modi possibili).
$|H^c| = 5 \cdot 4 \cdot 3$.

1)
$P(E) = |E|/|S| = 2/9$, $P(F) = |F|/|S| = 1/2$, $P(G) = |G|/|S| = 5/12$,
$P(H) = 1 - P(H^c) = 1 - |H^c|/|S| = 11/12$.
2)
Prima osservo che E e F non sono indipendenti. Infatti, $P(E \cap F) = |E \cap F|/|S| = (5 \cdot 4 \cdot 5)/(10 \cdot 9 \cdot 8) = 5/36$, mentre $P(E) \cdot P(F) = (2/9) \cdot (1/2) = 1/9$, quindi

$$P(E \cap F) \neq P(E)P(F)\,.$$

Se E, F, G fossero indipendenti allora lo sarebbero anche E e F, quindi concludo che E, F, G non sono eventi indipendenti.
3)
Per lo stesso argomento del punto 2) ho che E, F, G, H non sono eventi indipendenti.
4)
Chiamata X la vincita abbiamo che

$$E(X) = 3P(F) - 2(1 - P(F)) = 5P(F) - 2 = 1/2.$$

5)
T è v.a. geometrica di parametro $p = P(F)$. Quindi $E(T) = 1/p = 2$. Sappiamo che $Var(T) = (1-p)/p^2 = 2$, quindi $E(T^2) = E(T)^2 + Var(T) = 6$ e

$$E(2T^2 + 1) = 2E(T^2) + 1 = 13\,.$$

ESERCIZIO 2

1) Definiamo le variabili aleatorie
X_1 =numero di risposte esatte al test di diritto,
X_2 =numero di risposte esatte al test di economia,
X_3 =numero di risposte esatte al test di storia,.
Allora $X = X_1 + X_2 + X_3$.
X_1, X_2, X_3 sono v.a. indipendenti.
X_1 è v.a. binomiale di parametri $n = 10$ e $p = 1/4$.
X_2 è v.a. binomiale di parametri $n = 8$ e $p = 1/3$.
X_3 è v.a. binomiale di parametri $n = 6$ e $p = 1/2$.
Quindi

45

$E(X_1) = 10/4 = 5/2$, $Var(X_1) = 10(1/4)(3/4) = 15/8$,
$E(X_2) = 8/3$, $Var(X_2) = 8(1/3)(2/3) = 16/9$,
$E(X_3) = 6/2 = 3$, $Var(X_3) = 6(1/2)(1/2) = 3/2$.
Concludiamo che

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = 5/2 + 8/3 + 3 = 49/6$$

$$Var(X) = Var(X_1) + Var(X_2) + Var(X_3) = 15/8 + 16/9 + 3/2 = 371/72$$

$$Var(10X - 11) = 100Var(X) = 37100/72$$

2) Per indipendenza

$$P(X = 0) = P(X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0) = P(X_1 = 0)P(X_2 = 0)P(X_3 = 0) = (3/4)^{10}(2/3)^8(1/2)^6 .$$

3) Per indipendenza

$$P(X = 1) = P(X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 0)+P(X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 0)+P(X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 1) =$$
$$P(X_1 = 1)P(X_2 = 0)P(X_3 = 0)+P(X_1 = 0)P(X_2 = 1)P(X_3 = 0)+P(X_1 = 0)P(X_2 = 0)P(X_3 = 1)$$

Per concludere basta sostituire nell'ultimo membro le seguenti quantità:
$P(X_1 = 0) = (3/4)^{10}$, $P(X_1 = 1) = 10(1/4)(3/4)^9$
$P(X_2 = 0) = (2/3)^8$, $P(X_2 = 1) = 8(1/3)(2/3)^7$
$P(X_3 = 0) = (1/2)^6$, $P(X_3 = 1) = 6(1/2)^6$.

ESERCIZIO 3

1)

$$p_X(a) = \begin{cases} 2/8 & \text{se } a = -2, \\ 1/8 & \text{se } a = 0, \\ 5/8 & \text{se } a = 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$E(X) = (2/8)(-2) + (1/8)0 + (5/8)1 = 1/8$,
$E(3X + 1) = 3E(X) + 1 = 3/8 + 1 = 11/8$,
$E(X^2) = (2/8)(-2)^2 + (1/8)0 + (5/8)1^2 = 13/8$,
$E(3X^2 + 1) = 3E(X^2) + 1 = 3(13/8) + 1 = 47/8$,
$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 13/8 - (1/8)^2 = 103/64$.
2) Per i teoremi limite sulle successioni monotone di eventi deve essere $\lim_{a\uparrow\infty} F_X(a) = 1$. Tale condizione non è verificata quindi una v.a. X come nel testo non esiste.
3) Le entrate della tabella sono a valori in $[0, 1]$ e la loro somma dà 1. Quindi X, Y come nel testo esistono.

$$F_X(a) = \begin{cases} 0 & \text{se } a < -1, \\ 3/6 & \text{se } -1 \leqslant a < 1, \\ 1 & \text{se } a \geqslant 1. \end{cases}$$

$$F_Y(a) = \begin{cases} 0 & \text{se } a < 0, \\ 2/6 & \text{se } 0 \leqslant a < 1, \\ 5/6 & \text{se } 1 \leqslant a < 2, \\ 1 & \text{se } a \geqslant 2, \end{cases}$$

46

$$p_X(a) = \begin{cases} 1/2 & \text{se } a = -1, \\ 1/2 & \text{se } a = 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$p_Y(a) = \begin{cases} 2/6 & \text{se } a = 0, \\ 3/6 & \text{se } a = 1, \\ 1/6 & \text{se } a = 2, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$E(XY^2) = (-1)(1)^2(2/6) + 1(1)^2(1/6) + 1(2)^2(1/6) = 1/2$
$E(X) = (-1)(1/2) + 1(1/2) = 0$
$E(Y) = 1(3/6) + 2(1/6) = 5/6$
$E(XY) = (-1)1(2/6) + (1)(1)(1/6) + (1)(2)(1/6) = 1/6$
$E(XY^2 + 3X) = E(X^2Y) + 3E(X) = (1/2) + 3(0) = 1/2,$
$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = (1/6) - 0(5/6) = 1/6,$

$$Cov(2X+1, Y) = E((2X+1)Y) - E(2X+1)E(Y) = 2E(XY) + E(Y) - (2E(X)+1))E(Y) = 2(1/6) + (5/6) - (2 \cdot 0 + 1)(5/6) = 2/6$$

Un altro modo per calcolare $Cov(2X + 1, Y)$: $Cov(\cdot, \cdot)$ è bilineare, quindi
$Cov(2X + 1, Y) = 2Cov(X, Y) + Cov(1, Y) = 2(1/6) + 0 = 2/6.$
X e Y non sono indipendenti in quanto $Cov(X, Y) \neq 0$.

Calcolo delle Probabilità. Esame scritto (17/07/07)
Tempo a disposizione: 2 ore.

Nota. In tutti gli esercizi, tranne che nell'esercizio 1 e nel punto 3 dell'esercizio 2, i risultati finali devono essere in forma di frazioni a/b, con a e b numeri interi ESPLICITAMENTE calcolati. **Non è cosentito l'uso di calcolatrici**

FORMULARIO

Se X è v.a. binomiale di parametri n, p, allora $E(X) = np$, $Var(X) = np(1-p)$.
Se X è v.a. geometrica di parametro p, allora $E(X) = 1/p$, $Var(X) = (1-p)/p^2$.
Se X è v.a. di Poisson con parametro λ, allora $E(X) = \lambda$, $Var(X) = \lambda$.
Se X è v.a. ipergeometrica di parametri n, N, m (tipo: estraggo senza rimpiazzo n palline da un'urna con m palline bianche e $N-m$ palline nere e X è il numero di palline bianche estratte) allora $E(X) = nm/N$ e $Var(X) = \frac{N-n}{N-1}np(1-p)$ dove $p = m/N$.

ESERCIZIO 1

In una partita a bridge un mazzo di 52 carte viene suddiviso tra 4 giocatori (detti Nord, Sud, Est, Ovest) dando 13 carte ad ogni giocatore. Ricordiamo che le carte del mazzo presentano 4 semi (picche, cuori, quadri, fiori), e per ogni seme vi sono 13 valori.
Determinare la probabilità dei seguenti eventi:
E_1 ="ogni giocatore ha carte tutte dello stesso seme",
E_2 ="Nord ha 4 assi",
E_3 ="tutte le carte di picche e cuori sono andate a Nord e Sud, mentre tutte le carte di quadri e fiori sono andati a Ovest ed Est",
E_4 ="tutte le carte di picche sono andate a Nord e Sud".
Infine, dire se gli eventi E_1 e E_2 sono indipendenti.

ESERCIZIO 2

Considerare il seguente gioco a premi. Si lancia un dado. Se esce un numero diverso da 6 il giocatore sceglie a caso tra 5 buste chiuse contenenti la vincita. Le 5 vincite (associate alle 5 buste) sono: 1 euro, 2 euro, 3 euro, 4 euro e -4 euro (in questo caso, si tratta di una perdita e il giocatore deve pagare 4 euro). Se il lancio del dado dà 6 il giocatore sceglie a caso tra 2 buste chiuse contenenti la vincita. Le 2 vincite (associate alle 2 buste) sono: 10 euro e -4 euro.
1) Chiamata X la vincita del giocatore, determinare la densità discreta di X, $E(X)$ e $Var(X)$.
2) Determinare inoltre la probabilità che sia uscito 6 sapendo che il giocatore ha perso 4 euro.
3) Ripetendo il gioco 10 volte, quant'è la probabilità che il giocatore abbia vinto 4 euro per esattamente 6 volte? (*Basta indicare un'espressione algebrica senza svolgere il calcolo*)
4) Si ripete il gioco fino a quando non si vincono 10 euro. Chiamato T il numero di giocate effettuate fino a quella vincente inclusa, determinare $E(T)$ e $Var(T)$.

ESERCIZIO 3

Dire se esistono (motivandone la risposta) variabili aleatorie discrete X e Y, con X a valori

48

in $\{-1, 1\}$ e Y a valori in $\{-1, 2\}$, la cui densità congiunta è rappresentata dalle entrate della seguente tabella:

$X \setminus Y$	-1	2
-1	$1/8$	$2/8$
1	$2/8$	$3/8$

(cioè $p_{(X,Y)}(-1,-1) = 1/8$, $p_{(X,Y)}(-1,2) = 2/8$,...).
In caso affermativo determinare la densità discreta di X, la densità discreta di Y, la funzione di distribuzione di X, la funzione di distributione di Y.
Calcolare $E(2XY^3 + 3X^2Y - 2)$, $Cov(X,Y)$, $Cov(XY,Y)$. Inoltre dire se X e Y sono indipendenti e giustificarne la risposta.

49

Calcolo delle Probabilità. Esame scritto (17/07/07)
TRACCIA DELLE SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

$$P(E_1)=\frac{4!}{\binom{52}{13,13,13,13}},\qquad P(E_2)=\frac{\binom{48}{9}\binom{39}{13,13,13}}{\binom{52}{13,13,13,13}}$$
$$P(E_3)=\frac{\binom{26}{13,13}\binom{26}{13,13}}{\binom{52}{13,13,13,13}},\qquad P(E_4)=\frac{\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{26}{13}}{\binom{52}{13,13,13,13}}$$

Gli eventi E_1 ed E_2 non sono indipendenti. Infatti $P(E_1\cap E_2)=0$ entre $P(E_1)P(E_2)>0$. Quindi

$$P(E_1\cap E_2)\neq P(E_1)P(E_2).$$

ESERCIZIO 2

1)

$$P_X(a)=\begin{cases}\frac{1}{6} & \text{se } a=1,2,3,4,\\ \frac{1}{12} & \text{se } a=10,\\ \frac{5}{6}\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\frac{1}{2}=\frac{1}{4} & \text{se } a=-4.\end{cases}$$

$$E(X)=\frac{1}{6}(1+2+3+4)+\frac{10}{12}-4\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$$
$$E(X^2)=\frac{1}{6}(1+4+9+16)+\frac{100}{12}+\frac{16}{4}=\frac{52}{3}$$
$$Var(X)=E(X^2)-E(X)^2=\frac{52}{3}-\frac{9}{4}=\frac{181}{12}$$

2) Chiamiamo E l'evento che sia uscito 6 e F l'evento che il giocatore abbia perso 4 euro.

$$P(E|F)=\frac{P(E\cap F)}{P(F)}=\frac{\frac{1}{6}\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}.$$

3) $p=\binom{10}{6}(1/6)^6(5/6)^4$.
4) T è v.a. geometrica di parametro 1/12. Quindi $E(T)=12$, $Var(T)=132$.

ESERCIZIO 3

X,Y esistono siccome le entrate della tabella sono non negative con somma pari a 1.

$$p_X(a)=\begin{cases}3/8 & \text{se } a=-1,\\ 5/8 & \text{se } a=1,\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases},\qquad p_Y(a)=\begin{cases}3/8 & \text{se } a=-1,\\ 5/8 & \text{se } a=2,\\ 0 & \text{altrimenti.}\end{cases}$$

$$F_X(a)=\begin{cases}0 & \text{se } a<-1\\ 3/8 & \text{se } -1\leqslant a<1,\\ 1 & \text{se } a\geqslant 1,\end{cases},\qquad F_Y(a)=\begin{cases}0 & \text{se } a<-1\\ 3/8 & \text{se } -1\leqslant a<2,\\ 1 & \text{se } a\geqslant 2.\end{cases}$$

50

$E(X) = -3/8 + 5/8 = 1/4,$
$E(Y) = -3/8 + 10/8 = 7/8$
$E(XY) = 1/8 - 4/8 - 2/8 + 6/8 = 1/8$
$E(XY^3) = 1/8 - 8(2/8) - 2/8 + 8(3/8) = 7/8$
$E(XY^2) = -1/8 - 4(2/8) + 2/8 + 4(3/8) = 5/8$
$E(X^2Y) = E(Y) = 7/8$

Quindi
$E(2XY^3 + 3X^2Y - 2) = 2E(XY^3) + 3E(X^2Y) - 2 = 2(7/8) + 3(7/8) - 2 = 19/8$
$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 1/8 - (1/4)(7/8) = -3/32$
$Cov(XY, Y) = E(XY^2) - E(XY)E(Y) = (5/8) - (1/8)(7/8) = 33/64$
X, Y non sono indipendenti dato che $Cov(X, Y) \neq 0$.

51

Calcolo delle probabilità - Esame scritto 17/09/07.

TEMPO A DISPOSIZIONE: 1 ora e 30 minuti.

Nota. Non è consentito l'uso di calcolatrici. Le risposte degli esercizi 2 e 3 devono essere esplicitamente calcolate come numeri frazioni (cioè devono essere della forma a/b con a e b numeri interi).

FORMULARIO

Se X è v.a. binomiale di parametri n, p, allora $E(X) = np$, $Var(X) = np(1-p)$.
Se X è v.a. geometrica di parametro p, allora $E(X) = 1/p$, $Var(X) = (1-p)/p^2$.
Se X è v.a. di Poisson con parametro λ, allora $E(X) = \lambda$, $Var(X) = \lambda$.
Se X è v.a. ipergeometrica di parametri n, N, m (tipo: estraggo senza rimpiazzo n palline da un'urna con m palline bianche e $N-m$ palline nere e X è il numero di palline bianche estratte) allora $E(X) = nm/N$ e $Var(X) = \frac{N-n}{N-1}np(1-p)$ dove $p = m/N$.

ESERCIZIO 1. Da un'urna con 20 palline numerate da 1 a 20 si estraggono 4 palline senza rimpiazzo. Determinare la probabiltà dei seguenti eventi:
1) escono solo numeri pari,
2) le prime tre palline hanno un numero divisibile per 3, mentre la quarta no,
3) la prima pallina ha un numero pari mentre le restanti tre hanno un numero divisibile per 3.

ESERCIZIO 2. Un'agenzia di viaggio ha organizzato un soggiorno a Vienna per tre giorni. Si sono iscritte 50 persone, di queste 10 hanno optato per l'hotel a 5 stelle, 20 per l'hotel a 3 stelle e 20 per l'hotel a 1 stella.
Il costo del soggiorno ammonta a 1000 euro per l'hotel a 5 stelle, 500 euro per l'hotel a 3 stelle e 300 euro per l'hotel a 1 stella.
È possibile disdire la prenotazione (quindi non soggiornare a Vienna tramite l'agenzia), in tal caso bisogna pagare metà del costo del soggiorno come penale (ad esempio: se una persona che doveva alloggiare nell'hotel a 5 stelle annulla il viaggio allora deve pagare 500 euro all'agenzia).
Si presume che le persone decidano indipendentemente se annullare o meno il soggiono, inoltre si stima che il cliente che ha scelto l'hotel a 5 stelle annullerà il viaggio con probabiltà 1/10, che il cliente che ha scelto l'hotel a 3 stelle annullerà il viaggio con probabiltà 1/10 e che il cliente che ha scelto l'hotel a 1 stella annullerà il viaggio con probabiltà 1/20.
1) Determinare il valor medio e la varianza del numero di clienti che si presume andranno a Vienna.
2) Determinare il valore atteso del guadagno.

ESERCIZIO 3.
Si hanno 3 dadi: 2 sono non truccati e uno è truccato. In quello truccato 1 esce con probabilità 1/2 mentre gli altri 5 numeri escono con probabilità 1/10.
Si lanciano i tre dadi.
1) Determinare la probabilità che la somma dia 6.
Ora invece si sceglie a caso uno tra i tre dadi e lo si lancia.
2) Determinare la probabilità che il dado sia truccato sapendo che è uscito il numero 4.

52

Calcolo delle probabilità - Esame scritto 17/09/07.
TRACCIA DELLE SOLUZIONI

ESERCIZIO 1.
1) $P(E_1) = \frac{\binom{10}{4}}{\binom{20}{4}}$
2) $P(E_2) = \frac{6}{20}\frac{5}{19}\frac{4}{18}\frac{14}{17}$
3) Sia F l'evento che la prima pallina abbia un numero divisibile per 6 (cioè, il numero è 6,12,18) e le tre restanti abbiano un numero divisibile per 3. Sia G l'evento che la prima pallina abbia un numero divisibile per 2 ma non per 3 (cioè, 2,4,8,10,14,16,20) e le altre tre abbiano un numero divisibile per 3. Allora $P(E_3) = P(F) + P(G)$. I numeri divisibili per 3 sono 6 (3,6,9,12,15,18), se la prima pallina è divisibile per 3 i numeri delle altre palline possono essere scelti da un insieme di 5 elementi. Quindi

$$P(F) = \frac{3}{20}\frac{5}{19}\frac{4}{18}\frac{3}{17}$$

e

$$P(G) = \frac{7}{20}\frac{6}{19}\frac{5}{18}\frac{4}{17}$$

ESERCIZIO 2. Chiamiamo X il numero di persone che andranno a Vienna.
Chiamiamo X_1 il numero di persone che andranno a Vienna alloggiando nell'hotel a 5 stelle.
Chiamiamo X_2 il numero di persone che andranno a Vienna alloggiando nell'hotel a 3 stelle.
Chiamiamo X_3 il numero di persone che andranno a Vienna alloggiando nell'hotel a 1 stella.
Abbiamo che X_1, X_2, X_3 sono indipendenti e

$$X_1 = Bin(10, 9/10)\,, \qquad X_2 = Bin(20, 9/10)\,, \qquad X_3 = Bin(20, 19/20)\,.$$

Quindi

$$E(X) = E(X_1+X_2+X_3) = E(X_1)+E(X_2)+E(X_3) = 10(9/10)+20(9/10)+20(19/20) = 46\,.$$

e

$$Var(X) = Var(X_1 + X_2 + X_3) = Var(X_1) + Var(X_2) + Var(X_3) =$$
$$10(9/10)(1/10) + 20(9/10)(1/10) + 20(19/20)(1/20) = 73/20\,.$$

Chiamiamo Y il guadagno. Allora

$$E(Y) = 1000E(X_1)+500E(10-X_1)+500E(X_2)+250E(20-X_2)+300E(X_3)+150E(20-X_3) =$$
$$1000\cdot 9 + 500\cdot 1 + 500\cdot 18 + 250\cdot 2 + 300\cdot 19 + 150\cdot 1 = 24850$$

ESERCIZIO 3. 1) Chiamiamo (x_1, x_2, x_3) i tre valori usciti, dove x_3 è il valore del terzo dado. La probabilità dell'esito (x_1, x_2, x_3) è pari a $(1/6)(1/6)(1/2) = 1/72$ se $x_3 = 1$ ed è pari a $(1/6)(1/6)(1/10) = 1/360$ se $x_3 \neq 1$.

Se $x_3 = 1$ allora possiamo avere $x_1 + x_2 + x_3 = 6$ solo se $x_1 + x_2 = 5$ e quindi (x_1, x_2) può essere $(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)$. Abbiamo in totale 4 esiti favorevoli.

Se $x_3 \neq 1$ allora le soluzioni di $x_1 + x_2 + x_3 = 6$ sono tante quanto le soluzioni intere positive di tale equazione (quindi $\binom{5}{2} = 10$) a cui bisogna togliere le quattro suddette. Quindi gli esitii (x_1, x_2, x_3) con $x_1 + x_2 + x_3 = 6$ e $x_3 \neq 1$ sono $10 - 4 = 6$.

S3

L'evento ha quindi probabilità

$$4(1/72) + 6(1/360) = 4(5/360) + 6/360 = 26/360$$

2) Sia F l'evento che esca 4 e sia E l'evento che il dado sia truccato. Allora

$$P(E|F) = P(E \cap F)/P(F) = \frac{P(F|E)P(E)}{P(F|E)P(E) + P(F|E^c)P(E^c)} = \frac{(1/10)(1/3)}{(1/10)(1/3) + (1/6)(2/3)} = 3/13$$

Calcolo delle probabilità - Esonero 21/11/07.
TEMPO A DISPOSIZIONE: 1 ora e 30 minuti.

Nota. Non è consentito l'uso di calcolatrici.
Negli esercizi 2 e 3 è sufficiente dare le risposte come espressioni algebriche contenenti fattoriali o coefficienti binomiali/multinomiali.
Le risposte all'esercizio 1 devono essere esplicitamente calcolate come numeri frazioni (cioè devono essere della forma a/b con a e b numeri interi).

ESERCIZIO 1.
I lati di un quadrato vengono colorati a caso: ciascun lato può essere colorato di rosso o giallo o verde o blu o rosa, e tutte le possibili colorazioni dei lati sono equiprobabili.
1) Determinare la probabilità che tutti i lati siano delle stesso colore,
2) Determinare la probabilità che i lati siano tutti di diverso colore,
3) Determinare la probabilità che i lati adiacenti (cioè i lati che hanno in comune un vertice) abbiano colori diversi.
4) Determinare la probabilità che vi siano esattamente 3 lati dello stesso colore.

ESERCIZIO 2. Da un mazzo di 40 carte si estraggono 4 carte senza rimpiazzo.
1) Determinare la probabilità dell'evento E definito come segue:
E=*"le 4 carte estratte sono di bastoni o sono 4 assi o - opportunamente ordinate - hanno valori consecutivi"*, dove i valori sono da considerare ordinati in ordine crescente nel seguente modo: asso, 2,3,4,5,6,7,fante, cavallo, re. Ad esempio, asso, 2,3,4 sono quattro valori consecutivi.
Si consideri ora il seguente esperimento: Da un mazzo di 40 carte si estraggono 4 carte senza rimpiazzo. Se tra queste carte vi è almeno un asso ci si ferma altrimenti si estraggono altre 4 carte.
2) Determinare la probabilità che alla fine vi sia almeno un asso tra tutte le carte estratte.
3) Determinare la probabilità di avere estratto complessivamente 8 carte sapendo che tra le carte estratte vi è almeno un asso.

ESERCIZIO 3.
Vengono distribuite 24 palline assegnandole a caso a 4 persone in modo che ogni persona riceva almeno una pallina.
1) Determinare la probabilità che esattamente 2 persone abbiano ricevuto 10 palline.
2) Determinare la probabilità che esattamente 2 persone abbiano ricevuto 6 palline.
Vengono distribuite 24 palline, di cui 12 bianche e 12 nere, tra 4 persone assegnando a caso 6 palline a ciascuna persona.
3) Determinare la probabilità che ciascuna persona abbia palline tutte dello stesso colore.

55

Calcolo delle Probabilità. Esonero (21/11/07)
TRACCIA DELLE SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

Numeriamo i lati del quadrato in senso orario e chiamiamo i colori $C_1, C_2, \ldots, C_5$. Lo spazio campionario

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_i \in \{C_1, C_2, \ldots, C_5\} \; \forall i : 1 \leqslant i \leqslant 4\},$$

dove x_i è il colore del lato i–esimo, ha esiti equiprobabili e $|S| = 5^4$.
Chiamiamo $E_1, \ldots E_4$ gli eventi dei punti 1), ... 4) nel testo.
1) $P(E_1) = 5/5^4 = 1/125$.
2) $P(E_2) = (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2)/5^4 = 24/125$.
3) $E_3 = F \cup G$ dove
F="i lati adiacenti hanno colori diversi e $x_1 = x_3$",
G="i lati adiacenti hanno colori diversi e $x_1 \neq x_3$".
F e G sono disgiunti, quindi

$$|E_3| = |F| + |G| = 5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 4 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = 5(16 + 36) = 5 \cdot 52$$

Allora $P(E_3) = 52/125$.
4) $P(E_4) = \frac{\binom{4}{3} 5 \cdot 4}{5^4} = 16/125$ (ho $\binom{4}{3}$ modi per scegliere i 3 lati dello stesso colore, 5 modi per scegliere il colore che hanno in comune e 4 modi per scegliere il colore del rimanente lato).

ESERCIZIO 2

1) M sia il mazzo. $S = \{\{x_1, x_2, x_3, x_4\} : x_i \in M, \text{ distinti } \}$. Per simmetria gli esiti sono equiprobabili. Inoltre, $|S| = \binom{40}{4}$.
Considero gli eventi
F="estraggo 4 carte di bastoni", $|F| = \binom{10}{4}$
G="estraggo carte con valori consecutivi", $|G| = 7 \cdot 4^4$
H="estraggo 4 assi", $|H| = 1$.
Noto che $E = F \cup G \cup H$. Inoltre $F \cap H = G \cap H = \emptyset$. Per principio inclusione–esclusione vale

$$P(E) = P(F \cup G \cup H) = P(F) + P(G) + P(H) - P(F \cap G) = \frac{\binom{10}{4} + 7 \cdot 4^4 + 1 - 7}{\binom{40}{4}}.$$

2) Siano A, B gli eventi
A="estraggo almeno un asso"
B="estraggo almeno un asso tra le prime 4 carte estratte".
Allora, $P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)$. Abbiamo

$$P(A|B) = 1, \; P(A|B^c) = 1 - P(A^c|B^c) = 1 - \frac{\binom{32}{4}}{\binom{36}{4}}, \; P(B) = 1 - P(B^c), \; P(B^c) = \frac{\binom{36}{4}}{\binom{40}{4}}$$

Basta sostituire.
3) Dobbiamo determinare $P(B^c|A)$. Per Bayes:

$$P(B^c|A) = P(A|B^c)P(B^c)/P(A).$$

Tutti i fattori sono stati calcolati al punto 2), qui basta sostituire.

56

ESERCIZIO 3

Nei primi due punti lo spazio campionario è

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_i \in \mathbb{N} \text{ e } x_i \geqslant 1 \ \forall i \in \{1,2,3,4\}; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 24\}.$$

Per simmetria, S ha esiti equiprobabili.

1) $E_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in S : |\{i : x_i = 10\}| = 2\}$. Allora $|E_1| = 6 \cdot 3 = 18$. Infatti, ho $\binom{4}{2} = 6$ modi per scegliere le 2 persone che ricevono 10 palline, e poi ho 3 modi per distribuire le rimanenti 4 palline tra le restanti due persone in modo che ciascuna abbia almeno una pallina: (3,1), (2,2), (1,3). Quindi

$$P(E_1) = \frac{18}{\binom{23}{3}}.$$

2) $E_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in S : |\{i : x_i = 6\}| = 2\}$. Allora $E_2 = 6 \cdot 10$. Infatti, ho $\binom{4}{2} = 6$ modi per scegliere le 2 persone che ricevono 6 palline, e poi ho 10 modi per distribuire le rimanenti 12 palline tra le restanti due persone in modo che ciascuna abbia almeno una pallina e in modo che non vi siano altre persone con 6 palline: (11,1), (10,2), ..., (7,5),(5,7),(4,8)...(1,11). Quindi

$$P(E_2) = \frac{60}{\binom{23}{3}}.$$

3) Penso le palline marcate, quindi distinguibili. Chiamo W l'insieme delle 24 palline marcate. Pongo

$$S = \{(A_1, A_2, A_3, A_4) : A_i \subset W \ \forall i, \ A_i \cap A_j = \emptyset \text{ se } i \neq j, \ A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = W\}$$

A_i rappresenta l'insieme delle palline ricevute dalla persona i-esima. Per simmetria, S ha esiti equiprobabili. Inoltre,

$$|S| = \binom{24}{6,6,6,6}.$$

Per determinare $|E_3|$, con $E_3 \subset S$, fisso prima i colori C_1, C_2, C_3, C_4 delle palline delle 4 persone. si tratta di anagrammare B,B,N,N, e lo posso fare in $\binom{4}{2} = 6$ modi. Fissati i colori, suddivido le 12 palline bianche tra le 2 persone che devono avere palline bianche: $\binom{12}{6}$ modi (se Mario e Paolo devono avere palline bianche allora scelgo le $\binom{12}{6}$ palline bianche da dare a Mario e le restanti 6 palline bianche le consegno a Paolo). Poi faccio lo stesso con le palline nere: $\binom{12}{6}$ modi. Quindi

$$P(E_3) = \frac{\binom{4}{2}\binom{12}{6}\binom{12}{6}}{\binom{24}{6,6,6,6}}.$$

57

Calcolo delle probabilità - Esonero parziale 09/01/08.
TEMPO A DISPOSIZIONE: 1 ora e 30 minuti.

Non è consentito l'uso di calcolatrici.

FORMULARIO

Se X è v.a. binomiale di parametri n, p, allora $E(X) = np$, $Var(X) = np(1-p)$.
Se X è v.a. geometrica di parametro p, allora $E(X) = 1/p$, $Var(X) = (1-p)/p^2$.
Se X è v.a. di Poisson con parametro λ, allora $E(X) = \lambda$, $Var(X) = \lambda$.
Se X è v.a. ipergeometrica di parametri n, N, m (tipo: estraggo senza rimpiazzo n palline da un'urna con m palline bianche e $N-m$ palline nere e X è il numero di palline bianche estratte) allora $E(X) = nm/N$ e $Var(X) = \frac{N-n}{N-1}np(1-p)$ dove $p = m/N$.

ESERCIZIO 1. La risposta dei quesiti (1),(3) e (4) deve essere data come numero frazionario del tipo a/b, con a e b numeri interi esplicitamente calcolati.
Si consideri il seguente gioco: si estraggono 2 carte senza rimpiazzo da un mazzo di 40 carte e si vincono tanti euro quanti sono gli assi estratti. Chiamare X la vincita totale ottenuta ripetendo il gioco 3 volte (reinserendo ogni volta le carte estratte).
1) Calcolare $E(X)$, $Var(X)$, $Var(-2X+1)$.
2) Determinare (non serve il calcolo esplicito) la probabilità che la vincita totale X sia pari a 4.
3) Chiamato Y il numero di estrazioni in cui si vincono 2 euro, calcolare $E(Y), Var(Y)$.
Si immagini ora di ripetere il gioco non 3 volte, bensì fino a quando non si vincono 2 euro in una singola estrazione. Chiamare Z il numero di volte in cui si ripete il gioco (inclusa la giocata finale in cui si vincono 2 euro).
4) Calcolare $E(Z)$.
5) Determinare (non serve il calcolo esplicito) $P(Z = 7 | Z > 2)$.

ESERCIZIO 2. La risposta dei questiti (2) , (3) e (5) deve essere data come numero frazionario del tipo a/b, con a e b numeri interi esplicitamente calcolati.
In una scuola multietnica vi sono 30 allievi italiani, 20 allievi africani e 30 allievi asiatici. Si scelgono a caso 3 allievi come rappresentanti degli studenti. Chiamare X il numero di studenti italiani tra quelli scelti e Y il numeri di studenti africani tra quelli scelti.
1) Determinare la densità discreta di X, la densità discreta di Y e la densità congiunta di X e Y (NON serve svolgere tutti i calcoli).
2) Calcolare $P(X = 1 | Y = 1)$,
3) Calcolare $E(X+Y)$, $E(4X-2Y)$.
4) Dire se X e Y sono variabili aleatorie indipendenti.
5) Calcolare $E(XY)$.
6) Determinare $Cov(X, Y)$ (NON serve svolgere tutti i calcoli).
7) Dire se X e la variabile aleatoria costantemente pari a 1 sono v.a. indipendenti.

58

Calcolo delle probabilità - Esonero parziale 09/01/08.
TRACCIA DELLE SOLUZIONI

ESERCIZIO 1. 1) Chiamiamo X_i la vincita alla giocata i–esima, $i = 1, 2, 3$. Allora $X = X_1 + X_2 + X_3$ con X_1, X_2, X_3 v.a. indipendenti. Quindi $E(X) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3)$ e $Var(X) = Var(X_1) + Var(X_2) + Var(X_3)$. Le X_i assumono valori 0,1,2, con probabilità
$P(X_i = 0) = \frac{36 \cdot 35}{40 \cdot 39} = \frac{3 \cdot 7}{2 \cdot 13} = \frac{21}{26}$,
$P(X_i = 1) = \frac{4 \cdot 36}{\binom{40}{2}} = \frac{4 \cdot 36 \cdot 2}{40 \cdot 39} = \frac{12}{5 \cdot 13} = \frac{12}{65}$,
$P(X_i = 2) = \frac{4 \cdot 3}{40 \cdot 39} = \frac{1}{130}$.
Da cui otteniamo:
$E(X_i) = \frac{12}{5 \cdot 13} + 2\frac{1}{130} = \frac{26}{130} = \frac{1}{5}$,
$E(X_i^2) = \frac{12}{5 \cdot 13} + 4\frac{1}{130} = \frac{28}{130} = \frac{14}{65}$.
$Var(X_i) = E(X_i^2) - (E(X_i))^2 = \frac{14}{65} - \frac{1}{25} = \frac{14 \cdot 5 - 13}{13 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{57}{13 \cdot 25} = \frac{57}{325}$.
Un altro metodo per ottenere i suddetti risultati è il seguente: basta osservare che X_i è v.a. ipergeometrica di parametri $N = 40, n = 2, m = 4$. Quindi

$$E(X_i) = \frac{2 \cdot 4}{40} = \frac{1}{5}, \qquad Var(X_i) = \frac{38}{39} 2 \frac{1}{10} \frac{9}{10} = \frac{57}{325}.$$

Infine, abbiamo
$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = \frac{3}{5}$,
$Var(X) = Var(X_1) + Var(X_2) + Var(X_3) = \frac{3 \cdot 57}{325} = \frac{171}{325}$.
$Var(-2X + 1) = 4Var(X) = 4\frac{171}{325} = \frac{684}{325}$.
2) Per ottenere 4 euro in 3 giocate, devo aver vinto 2 volte 2 euro e una volta 0 euro oppure devo aver vinto 2 volte 1 euro e 1 volta 2 euro. Quindi

$$P(X = 8) = 3\left(\frac{1}{130}\right)^2 \frac{21}{26} + 3\frac{1}{130}\left(\frac{12}{65}\right)^2.$$

3) $Y = Bin(3, 1/130)$. Quindi $E(Y) = 3/130$, $Var(Y) = 3(1/130)(129/130) = \frac{387}{16900}$.
4) Z è v.a. geometrica di parametro $p = 1/130$. Quindi $E(Z) = 130$.
5) Per la proprietà di assenza di memoria della v.a. geometrica vale

$$P(Z = 7 | Z > 2) = P(Z = 5) = (1 - p)^4 p = \frac{129^4}{130^5}.$$

ESERCIZIO 2. 1)

$$P_X(k) = \begin{cases} \frac{\binom{30}{k}\binom{50}{3-k}}{\binom{80}{3}} & \text{se } k = 0, 1, 2, 3 \\ 0 & \text{altrimenti}. \end{cases}$$

$$P_Y(k) = \begin{cases} \frac{\binom{20}{k}\binom{60}{3-k}}{\binom{80}{3}} & \text{se } k = 0, 1, 2, 3 \\ 0 & \text{altrimenti}. \end{cases}$$

$$P_{X,Y}(a, b) = \begin{cases} \frac{\binom{30}{a}\binom{20}{b}\binom{30}{3-a-b}}{\binom{80}{3}} & \text{se } a, b \in \{0, 1, 2, 3\},\ a + b \leq 3, \\ 0 & \text{altrimenti}. \end{cases}$$

59

2) $P(X=1|Y=1) = P(X=1, Y=1)/P(Y=1) = \frac{30\cdot 20\cdot 30}{\binom{80}{3}} / \frac{20\binom{60}{2}}{\binom{80}{3}} = \frac{30\cdot 20\cdot 30\cdot 2}{20\cdot 60\cdot 59} = \frac{30}{59}$

3) X è v.a. ipergeometrica di parametri $n=3, N=80, m=30$ mentre Y è v.a. ipergeometrica di parametri $n=3, N=80, m=20$. Quindi $E(X) = \frac{3\cdot 30}{80} = \frac{9}{8}$, $E(Y) = \frac{3\cdot 20}{80} = \frac{6}{8}$. Ne deduciamo che $E(X+Y) = (9/8)+(6/8) = 15/8$, $E(4X-2Y) = 4E(X) - 2E(Y) = 4(9/8) - 2(6/8) = (36-12)/8 = 24/8 = 3$.

4) X e Y non sono indipendenti. Infatti deve essere $X+Y \leq 3$. Quindi $0 = P(X=3, Y=3)$. Mentre sappiamo che $P(X=3) > 0, P(Y=3) > 0$, perciò non può essere $P(X=3, Y=3) = P(X=3)P(Y=3)$. Ciò prova l'indipendenza.

5) Se $XY \neq 0$ allora (X,Y) può essere solo (1,1), (1,2), (2,1). Quindi $E(XY) = P(X=1, Y=1) + 2P(X=1, Y=2) + 2P(X=2, Y=1) = \frac{30\cdot 20\cdot 30}{\binom{80}{3}} + 2\frac{30\binom{20}{2}}{\binom{80}{3}} + 2\frac{\binom{30}{2}20}{\binom{80}{3}} = \frac{30\cdot 20\cdot 30+30\cdot 20\cdot 19+30\cdot 29\cdot 20}{80\cdot 79\cdot 78}\cdot 6 = \frac{30\cdot 20}{80\cdot 79\cdot 78}(30+19+29)6 = \frac{30\cdot 20\cdot 78\cdot 6}{80\cdot 79\cdot 78} = \frac{45}{79}$

6) $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 45/79 - (9/8)(6/8)$.

7) X e 1 sono indipendenti. Infatti per ogni $A, B \subset \mathbb{R}$ abbiamo

$$P(X\in A, 1\in B) = \begin{cases} P(X\in A) & \text{se } 1\in B, \\ 0 & \text{se } 1\notin B. \end{cases}$$

$$P(X\in A)P(1\in B) = \begin{cases} P(X\in A) & \text{se } 1\in B, \\ 0 & \text{se } 1\notin B. \end{cases}$$

Quindi $P(X\in A, 1\in B) = P(X\in A)P(1\in B)$.

60

Calcolo delle Probabilità. Esame scritto (23/01/08)

Tempo a disposizione: 2 ore.

Nota. Soltanto nei punto 4) dell'esercizio 1 e nei punti 2),4),5) e 6) dell'esercizio 2, i risultati finali devono essere in forma di frazioni a/b, con a e b numeri interi ESPLICITAMENTE calcolati. **Non è cosentito l'uso di calcolatrici**

FORMULARIO

Se X è v.a. binomiale di parametri n, p, allora $E(X) = np$, $Var(X) = np(1-p)$.

Se X è v.a. geometrica di parametro p, allora $E(X) = 1/p$, $Var(X) = (1-p)/p^2$.

Se X è v.a. di Poisson con parametro λ, allora $E(X) = \lambda$, $Var(X) = \lambda$.

Se X è v.a. ipergeometrica di parametri n, N, m (tipo: estraggo senza rimpiazzo n palline da un'urna con m palline bianche e $N-m$ palline nere e X è il numero di palline bianche estratte) allora $E(X) = nm/N$ e $Var(X) = \frac{N-n}{N-1}np(1-p)$ dove $p = m/N$.

ESERCIZIO 1

Si estraggono 6 carte da un mazzo di 40 carte. Determinare la probabilità dei seguenti eventi:

1) le carte hanno tutte lo stesso seme,

2) le carte estratte non sono di denari ne' di bastoni,

3) tre carte hanno lo stesso seme, le altre tre carte hanno lo stesso seme, e i due semi in questione sono diversi,

4) Chiamato X il numero di carte di denari o di coppe tra quelle estratte, calcolare esplicitamente come numeri frazionari $E(X)$, $E(X^2)$ e $Var(X)$.

5) Chiamato Y il numero di assi tra le carte estratte, dire se X e Y sono v.a. indipendenti e motivarne la risposta.

6) Chiamato Z il numero di fanti tra le carte estratte, determinare la densità congiunta di Y e Z.

7) X,Y e Z sono indipendenti? motivarne la risposta.

ESERCIZIO 2

Bob trasmette ad Alice messaggi tramite un canale di trasmissione ternario: il messaggio che Bob può inviare è una stringa finita di cifre 0,1,2 (es. 0011222).

La trasmissione di ciascuna cifra è indipendente dalla trasmissione delle altre cifre e a causa del rumore si hanno le seguenti possibilità di errore:

se Bob invia 0, Alice riceve 0 con probabilità 0.8, riceve 1 con probabilità 0.1 e riceve 2 con probabilità 0.1,

se Bob invia 1, Alice riceve 0 con probabilità 0.2, riceve 1 con probabilità 0.7 e riceve 2 con probabilità 0.1,

se Bob invia 2, Alice riceve 0 con probabilità 0.1, riceve 1 con probabilità 0.1 e riceve 2 con probabilità 0.8.

Bob invia il messaggio 000121202.

1) Determinare la probabilità che Alice riceva il messaggio di Bob correttamente.

2) Chiamato X il numero di cifre del messaggio trasmesse correttamente, calcolare esplicitamente come numeri frazionari $E(X)$, $Var(X)$.

3) Determinare la probabilità che una sola cifra del messaggio sia stata trasmessa in modo errato.

Supporre ora che Bob trasmetta una stringa di due cifre, scegliendola con uguale probabilità tra tutte le possibili stringhe di due cifre.

4) Calcolare esplicitamente come numero frazionario la probabilità che Alice riceva la stringa "00".

5) Calcolare esplicitamente come numero frazionario le parobabilità che Bob abbia inviato la stringa "00" condizionata al fatto che Alice ha ricevuto la stringa "00".

Immaginare ora che Bob continui ad inviare ad Alice stringhe di 2 cifre, scegliendole ogni volta a caso tra tutte le possibili stringhe di due cifre.

6) Chiamato Y il numero di stringhe ricevute da Alice fino al ricevimento della stringa "00" (questa sia inclusa nel conteggio di Y), calcolare esplicitamente come numero frazionario $E(Y)$.

61

Esame 23/01/08. TRACCIA DELLE SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

1) $P(E_1) = 4\frac{\binom{10}{6}}{\binom{40}{6}}$

2) $P(E_2) = \frac{\binom{20}{6}}{\binom{40}{6}}$.

3) $P(E_3) = \binom{4}{2}\binom{10}{3}\binom{10}{3}/\binom{40}{6}$

4) X è v.a. ipergeometrica di parametri $N = 40$, $n = 6$, $m = 20$. Quindi $E(X) = \frac{6\cdot 20}{40} = 3$, $Var(X) = \frac{34}{39} \cdot 6 \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{17}{13}$ e $E(X^2) = E(X)^2 + Var(X) = 9 + (17/13) = 134/13$

5) X e Y non sono indipendenti. Infatti $P(X = 6, Y = 4) = 0$ mentre $P(X = 6) > 0$ e $P(Y = 4) > 0$ quindi non può essere che $P(X = 6, Y = 4) = P(X = 6)P(Y = 4)$.

6) (Y,Z) assume valori (a, b) con a, b interi non negativi e $a + b \leqslant 6$. Per tali valori vale

$$p_{(Y,Z)}(a, b) = \frac{\binom{4}{a}\binom{4}{b}\binom{32}{6-a-b}}{\binom{40}{6}}$$

Se a, b non sono come sopra, allora $P_{(Y,Z)}(a, b) = 0$.

7) X,Y e Z non sono indipendenti, in quanto X e Y non sono indipendenti.

ESERCIZIO 2

1) $(0.8)^7(0.7)^2$

2) Chiamato X_i il numero di cifre "i" trasmesse correttamente, per $i = 0, 1, 2$, vale $X = X_0+X_1+X_2$. X_0, X_1, X_2 sono v.a. indipendenti e $X_0 = Bin(4, 8/10)$, $X_1 = Bin(2, 7/10)$ e $X_2 = Bin(3, 8/10)$. Quindi:

$E(X_0) = 32/10$, $E(X_1) = 14/10$, $E(X_2) = 24/10$,

$Var(X_0) = 4(8/10)(2/10) = 64/100$, $Var(X_1) = 2(7/10)(3/10) = 42/100$, $Var(X_2) = 3(8/10)(2/10) = 48/100$.

$E(X) = E(X_0) + E(X_1) + E(X_2) = 7$

$Var(X) = Var(X_0) + Var(X_1) + Var(X_2) = 154/100$.

3) $p = 4(0.2)(0.8)^3(0.7)^2(0.8)^3 + 2(0.8)^4(0.3)(0.7)(0.8)^3 + 3(0.8)^4(0.7)^2(0.2)(0.8)^2$

4) Sia E l'evento "Alice riceve 00". Allora

$$P(E) = \sum_{a\in\{0,1,2,\}} \sum_{b\in\{0,1,2\}} P(E|ab)\frac{1}{9},$$

dove $P(E|ab)$ denota la probabilità di E condizionata al fatto che Bob abbia inviato il messaggio "ab. Abbiamo

$P(E|00) = 0.8 \cdot 0.8 = 64/100$

$P(E|01) = 0.8 \cdot 0.2 = 16/100$

$P(E|02) = 0.8 \cdot 0.1 = 8/100$

$P(E|10) = 0.2 \cdot 0.8 = 16/100$

$P(E|11) = 0.2 \cdot 0.2 = 4/100$

$P(E|12) = 0.2 \cdot 0.1 = 2/100$

$P(E|20) = 0.1 \cdot 0.8 = 8/100$

$P(E|21) = 0.1 \cdot 0.2 = 2/100$

$P(E|22) = 0.1 \cdot 0.1 = 1/100$

Quindi $P(E) = \frac{1}{9}\frac{64+16+8+16+4+2+8+2+1}{100} = \frac{121}{900}$

5) Sia F l'evento che Bob ha inviato "00". Allora

$$P(F|E) = P(E|F)P(F)/P(E) = (64/100)(1/9)/(121/900) = 64/121.$$

6) Y è v.a. geometrica di parametro $p = P(E) = 121/900$. Quindi $E(Y) = 900/121$.

62

Calcolo delle Probabilità. Esame scritto (06/02/08)
Tempo a disposizione: 2 ore.

Non è consentito l'uso di calcolatrici

FORMULARIO

Se X è v.a. binomiale di parametri n, p, allora $E(X) = np$, $Var(X) = np(1-p)$.
Se X è v.a. geometrica di parametro p, allora $E(X) = 1/p$, $Var(X) = (1-p)/p^2$.
Se X è v.a. di Poisson con parametro λ, allora $E(X) = \lambda$, $Var(X) = \lambda$.
Se X è v.a. ipergeometrica di parametri n, N, m (tipo: estraggo senza rimpiazzo n palline da un'urna con m palline bianche e $N - m$ palline nere e X è il numero di palline bianche estratte) allora $E(X) = nm/N$ e $Var(X) = \frac{N-n}{N-1}np(1-p)$ dove $p = m/N$.

ESERCIZIO 1

Il test per verificare se una persona soffre della malattia α funziona correttamente sulle persone sane con probabilità 8/10 (cioè, se la persona è effettivamente sana, il test afferma che la persona è sana con probabilità 8/10) e funziona correttamente sulle persone malate con probabilità 9/10.
In una clinica si segue la seguente procedura per verificare se la persona soffre della malattia α: si ripete tre volte il suddetto test, se risulta che la persona è sana in almeno 2 test la clinica considera la persona sana, altrimenti la clinica considera la persona malata.
Sapendo che il 4% della popolazione soffre della malattia α,
1) determinare la probabilità che una persona a caso, controllata dalla clinica, venga dichiara dalla clinica affetta della malattia α, [non serve svolgere tutti i calcoli]
2) calcolare la probabilità che una persona dichiarata dalla clinica affetta dalla malattia α lo sia veramente [non serve svolgere tutti i calcoli].

ESERCIZIO 2

Si consideri il vettore aleatorio (X, Y, Z) che assume valori in $\mathcal{H} := \{-1, 1\}^3$ con la seguente probabilità discreta $p = p_{(X,Y,Z)}$

$$p(-1,-1,-1) = 1/8, \quad p(-1,-1,1) = 2/8, \quad p(-1,1,-1) = 0, \quad p(-1,1,1) = 1/8,$$
$$p(1,-1,-1) = 2/8, \quad p(1,-1,1) = 0, \quad p(1,1,-1) = 0, \quad p(1,1,1) = 2/8.$$

1) Dire se un tale vettore aleatorio esiste e motivarne la risposta.
In caso affermativo, considerare i seguenti quesiti:
2) determinare le densità discrete di X, Y e Z,
3) determinare la funzione di distribuzione di X,
4) calcolare $E(3XYZ + 4Z)$,
5) calcolare $Var(X)$,
6) calcolare $Var(X + Z)$
7) dire se X, Y e Z sono indipendenti.
Nota: per i quesiti (4), (5) e (6) bisogna svolgere i calcoli e dare la soluzione come numero frazionario.

ESERCIZIO 3 Si consideri il seguente episodio di Guerre Stellari: *mentre Dart Fener ha quasi sottomesso l'intera galassia, i pianeti Alpha, Beta e Gamma9 decidono di allearsi e di combattere contro Dart Fener formando un gruppo speciale di 60 agenti segreti. Ciascun pianeta mette a disposizione 20 agenti segreti, di cui 5 sono uomini, 5 sono donne, 5 sono bambini e 5 sono bambine. Per compiere una missione speciale sul pianeta Ciccolo, vengono scelti a caso 4 tra i 60 agenti.* Determinare la probabilità dei seguenti eventi:
1) i 4 agenti sono abitanti dello stesso pianeta,
2) i 4 agenti sono tutti bambini (maschi),
3) i 4 agenti sono tutte donne o tutti abitanti del pianeta Alpha.
4) Supponendo che ciascun agente coinvolto nella missione speciale sul pianeta Ciccolo abbia probabilità 8/10 di sopravvivere, indipendentemente dalla sorte dei colleghi, calcolare dando la soluzione come numero frazionario $E(X)$ e $Var(X)$, dove X è il numero degli agenti che sopravviveranno.

Calcolo delle Probabilità. Esame scritto (06/02/08)

Traccia delle soluzioni.

ESERCIZIO 1

1)Consideriamo gli eventi $F =$"la persona è malata", $E =$"la persona è dichiarata malata dalla clinica". Allora,

$$P(E) = P(E|F)P(F) + P(E|F^c)P(F^c) = P(E|F)(4/100) + P(E|F^c)(96/100)\,.$$

Abbiamo

$$P(E|F) = \binom{3}{2}(9/10)^2(1/10) + (9/10)^3 = (3 \cdot 81 + 9^3)/10^3$$

e

$$P(E|F^c) = \binom{3}{2}(2/10)^2(8/10) + (2/10)^3 = (3 \cdot 4 \cdot 8 + 8)/10^3\,.$$

Quindi

$$P(E) = \frac{3 \cdot 4 \cdot 8 + 8}{10^3}\frac{4}{100} + \frac{3 \cdot 4 \cdot 8 + 8}{10^3}\frac{96}{100}\,.$$

2) per il teorema di Bayes, vale $P(F|E) = P(E|F)P(F)/P(E)$. basta sostituire le suddette espressioni per $P(E|F)$, $P(E)$ e ricordare che $P(F) = 4/100$.

ESERCIZIO 2

1) Un tale vettore aleatorio esiste dato che

$$\begin{cases} p_{(X,Y,Z)}(a,b,c) \in [0,1] & \forall (a,b,c) \in \mathcal{H}\,, \\ \sum_{(a,b,c)\in\mathcal{H}} p_{(X,Y,Z)}(a,b,c) = 1\,. \end{cases}$$

2)

$$p_X(a) = \begin{cases} 1/2 & \text{se } a = -1, \\ 1/2 & \text{se } a = 1, \\ 0 & \text{altrimenti}\,. \end{cases} \qquad p_Y(a) = \begin{cases} 5/8 & \text{se } a = -1, \\ 3/8 & \text{se } a = 1, \\ 0 & \text{altrimenti}\,. \end{cases} \qquad p_Z(a) = \begin{cases} 3/8 & \text{se } a = -1, \\ 5/8 & \text{se } a = 1, \\ 0 & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

2) $F_X(a) = P(X \leqslant a) = \begin{cases} 0 & \text{se } a < -1\,, \\ 1/2 \text{ se } -1 \leqslant a < 1\,, \\ 1 \text{ se } a \geqslant 1\,. \end{cases}$

3) $E(3XYZ + 4Z) = \sum_{(a,b,c)\in\mathcal{H}} p_{(X,Y,Z)}(a,b,c)(3abc + 4c) = (1/8)(-3-4) + (2/8)(3+4) + (1/8)(-3+4) + (2/8)(3-4) + (2/8)(3+4) = 20/8$.

4)$E(X) = 0$, $E(X^2) = 1$. $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 1$.

5) $E(X) = 0$, $E(Z) = -3/8 + 5/8 = 2/8$. Quindi $E(X + Z) = 1/4$.

$$E((X+Z)^2) = \sum_{(a,b,c)\in\mathcal{H}} p_{(X,Y,Z)}(a,b,c)(a+c)^2 = (1/8)(-2)^2 + (2/8)2^2 = (3/8)4 = 3/2$$

Quindi

$$Var(X+Z) = E((X+Z)^2) - E(X+Y)^2 = 3/2 - 1/16 = 23/16\,.$$

6) X, Y, Z non sono indipendenti. Infatti

$$p_{(X,Y,X)}(1,-1,1) \neq p_X(1)p_Y(-1)p_Z(1)$$

dato che il membro sinistro è nullo mentre il membro destro è il prodotto di tre fattori positivi e quindi è positivo.

ESERCIZIO 3

1) $p_1 = 3\frac{\binom{20}{4}}{\binom{60}{4}}$. 2) $p_2 = \frac{\binom{15}{4}}{\binom{60}{4}}$. 3) $p_3 = \frac{\binom{15}{4}+\binom{20}{4}-\binom{5}{4}}{\binom{60}{4}}$

4) $X = Bin(4, 8/10)$. Quindi $E(X) = 4(8/10) = 32/10$, $Var(X) = 4(8/10)(2/10) = 64/100$.

Calcolo delle Probabilità. Esame scritto (01/07/08)

Tempo a disposizione: 1 ora e 50 minuti.

Non è consentito l'uso di calcolatrici. I calcoli espliciti sono richiesti solo nel terzo esercizio.

FORMULARIO

Se X è v.a. binomiale di parametri n, p, allora $E(X) = np$, $Var(X) = np(1-p)$.
Se X è v.a. geometrica di parametro p, allora $E(X) = 1/p$, $Var(X) = (1-p)/p^2$.
Se X è v.a. di Poisson con parametro λ, allora $E(X) = \lambda$, $Var(X) = \lambda$.
Se X è v.a. ipergeometrica di parametri n, N, m (tipo: estraggo senza rimpiazzo n palline da un'urna con m palline bianche e $N - m$ palline nere e X è il numero di palline bianche estratte) allora $E(X) = nm/N$ e $Var(X) = \frac{N-n}{N-1} np(1-p)$ dove $p = m/N$.

ESERCIZIO 1

Marco, Paolo, Lucia e Sara estraggono senza rimpiazzo delle carte da un mazzo di 40 carte nel seguente modo: Marco estrae 4 carte, Paolo estrae 4 carte, Lucia estrae 3 carte e Sara estrae 3 carte.
1) Determinare la probabilità dei seguenti eventi:
E_1=" Marco e Paolo non hanno estratto alcuna carta di denari, mentre Lucia e Sara hanno estratto ciascuna esattamente 2 carte di denari",
E_2=" Marco e Lucia hanno estratto solo carte di denari",
E_3 =" almeno uno dei 4 ragazzi ha estratto solo carte di denari."
2) Chiamato X il numero di carte di denari complessivamente estratte determinare $E(X)$, $Var(X)$.
3) Chiamiamo Y il numero di carte di denari complessivamente estratte da Marco e Paolo e Z il numero di carte di denari complessivamente estratte da Sara e Lucia. Dire se X e Y sono indipendenti. Dire se Y e Z sono indipendenti. Dire se X, Y e Z sono indipendenti (motivare la risposta).
4) Determinare la densità discreta di Y.

ESERCIZIO 2

Un'urna contiene 100 bigliettini arrotolati di cui due danno una radio in premio e uno dà un televisore in premio. Per estrarre un biglietto bisogna pagare 10 euro. Mario non sa se estrarne 1 o 2. Allora decide di lanciare un moneta: se esce testa, compra un solo biglietto mentre se esce croce compra due biglietti.
1) Determinare la probabilità che Mario vinca almeno un premio.
2) Sapendo che Mario dopo l'estrazione ha vinto una radio e null'altro, determinare la probabilià che Mario abbia acquistato 2 biglietti.

ESERCIZIO 3

Sia X una variabile aleatoria che assume valori $-1, 0, 2$ rispettivamente con probabilità $1/2$, $1/4$, $1/4$. Dire se una tale variabile esiste e motivarne la risposta. In caso affermativo, calcolare esplicitamente come numeri frazionari $Var(X)$, $E(4X+2)$, $Cov(X, X^2)$. Determinare la funzione di distribuzione di X.

65

Calcolo delle Probabilità. Esame scritto (01/07/08) TRACCE

ESERCIZIO 1

1)

$$P(E_1) = \frac{\binom{30}{4}\binom{26}{4}\binom{10}{2}22\binom{8}{2}21}{\binom{40}{4,4,3,3}} = \frac{\binom{10}{0,0,2,2}\binom{30}{4,4,1,1}}{\binom{40}{4,4,3,3}}$$

Infatti, $\binom{30}{4}$ sono i modi in cui Marco può scegliere 4 carte non di denari (non conta l'ordine). Tolte dal mazzo queste 4 carte, Paolo ha $\binom{26}{4}$ possibilità per scegliere 4 carte non di denari (non conta l'ordine). Tolte dal mazzo queste altre 4 carte, Lucia ha $\binom{10}{2}$ modi per scegliere 2 carte di denari e 22 modi per scegliere 1 carta tra quelle non di denari che sono rimaste (non conta l'ordine),... In alternativa, prima si decide come scegliere tra le 10 carte di denari 0 per Marco, 0 per Paolo, 2 per Lucia e 2 per Sara (numero modi $=\binom{10}{0,0,2,2}$) e poi si decide come scegliere tra le 30 carte non di denari 4 per Marco, 4 per Paolo, 1 per Lucia e 1 per sara (numero modi$=\binom{40}{4,4,1,1}$).

$P(E_2) = \binom{10}{4}\binom{6}{3}/\binom{40}{4,3}$ (conviene restringere lo spazio campionario considerando solo le carte estratte da marco e lucia).

Possiamo scrivere $E_3 = A_M \cup A_P \cup A_L \cup A_S$ dove A_M, A_P, A_L, A_S denotano rispettivamente l'evento che Marco, Paolo, Lucia e Sara abbiamo estratto solo carte di denari. Per calcolare $P(E_3)$ possiamo usare il principio di inclusione-esclusione. In alternativa, possiamo scrivere $P(E_3) = 1 - P(E_3^c)$ e calcolare $P(E_3^c)$. E_3^c è l'evento che ciascuno dei 4 ragazzi abbia almeno una carta non di denari. interpretando k_i come il numero di carte non di denari del ragazzo i–esimo, abbiamo

$$P(E_3^c) = \sum_{(k_1,k_2,k_3,k_4)\in K} \frac{\binom{30}{k_1,k_2,k_3,k_4}\binom{10}{4-k_1,4-k_2,3-k_3,3-k_4}}{\binom{40}{4,4,3,3}}$$

dove

$$K = \{(k_1, k_2, k_3, k_4) : k_i \geqslant 1 \text{ intero }, k_1 \leqslant 4, k_2 \leqslant 4, k_3 \leqslant 3, k_4 \leqslant 3\}\,.$$

Si noti che automaticamente $(4-k_1)+(4-k_2)+(3-k_3)+(3-k_4) \leqslant 10$ e quindi non ho scritto esplicitamente questa condizione nella definizione di K.

2) X è variabile aleatoria ipergeometrica di parametri $N = 40$, $n = 14$ e $m = 10$. Quindi $E(X) = \frac{nm}{N} = \frac{140}{40}$,
$Var(X) = \frac{N-n}{N-1} n \frac{m}{N}\left(1-\frac{m}{N}\right) = \frac{26}{39} 14 \frac{10}{40}\frac{30}{40}$

3) X e Y non sono indipendenti in quanto deve essere $Y \leqslant X$. Quindi $P(X = 0, Y = 1) = 0$ mentre $P(X = 0)$e $P(Y = 1)$ sono positivi. ciò implica che $P(X = 0, Y = 1) \neq P(X = 0)P(Y = 1)$.
Y e Z non sono indipendenti in quanto deve essere $Y + Z \leqslant 10$. Quindi $P(Y = 8, Z = 6) = 0$ mentre $P(Y = 8)$ e $P(Z = 6)$ sono positivi. ciò implica che $P(Y = 8, Z = 6) \neq P(Y = 8)P(Z = 6)$.
X, Y, Z non sono indipendenti dato che X e Y non sono indipendenti.

4) Y assume valori $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$. Y è v.a. ipergeometrica di parametri $N = 40$, $n = 8$ e $m = 10$. Abbiamo

$$P(Y = k) = \begin{cases} \frac{\binom{10}{k}\binom{30}{8-k}}{\binom{40}{8}} & \text{se } k \in \{0, 1, \ldots, 8\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ESERCIZIO 2

1) definiamo gli eventi E e F come: E="Mario vince almeno un premio", F="esce testa". Abbiamo

$$P(E) = P(E|F)P(F) + P(E|F^c)P(F^c) = (3/100)(1/2) + (1 - \frac{97}{100}\frac{96}{99})(1/2).$$

2) definiamo gli eventi E e F come: E="Mario vince la radio e null'altro", F="Mario ha acquistato 2 biglietti"="esce croce". Per Bayes

$$P(F|E) = P(E|F)P(F)/P(E) = \frac{P(E|F)P(F)}{P(E|F)P(F) + P(E|F^c)P(F^c)}.$$

66

Osserviamo che
$P(E|F) = \frac{2 \cdot 97}{\binom{100}{2}}$
$P(F) = 1/2$ mentre $P(E) = P(E|F)P(F) + P(E|F^c)P(F^c) = \frac{2 \cdot 97}{\binom{100}{2}}(1/2) + (2/100)(1/2)$
Basta sostituire.

ESERCIZIO 3
X esiste in quanto $1/2, 1/4, 1/4$ sono numeri in $[0, 1]$ la cui somma vale 1.
Osserviamo che $E(X) = (-1)(1/2) + 2(1/4) = 0$, $E(X^2) = 1(1/2) + 4(1/4) = 3/2$, $E(X^3) = (-1)(1/2) + 2^3(1/4) = 3/2$. Quindi: $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 3/2$, $E(4X + 2) = 4E(X) + 2 = 2$, $Cov(X, X^2) = E(X^3) - E(X)E(X^2) = 3/2$.

$$F_X(a) = \begin{cases} 0 & \text{se } a < -1 \\ 1/2 & \text{se } -1 \leqslant a < 0 \\ 3/4 & \text{se } 0 \leqslant a < 2 \\ 1 & \text{se } a \geqslant 2 \end{cases}$$

Calcolo delle Probabilità. Esame scritto (14/07/08)

Tempo a disposizione: 1 ora e 40 minuti.

Non è consentito l'uso di calcolatrici. Fare i calcoli espliciti solo dove richiesto

FORMULARIO

Se X è v.a. binomiale di parametri n, p, allora $E(X) = np$, $Var(X) = np(1-p)$.
Se X è v.a. geometrica di parametro p, allora $E(X) = 1/p$, $Var(X) = (1-p)/p^2$.
Se X è v.a. di Poisson con parametro λ, allora $E(X) = \lambda$, $Var(X) = \lambda$.
Se X è v.a. ipergeometrica di parametri n, N, m (tipo: estraggo senza rimpiazzo n palline da un'urna con m palline bianche e $N-m$ palline nere e X è il numero di palline bianche estratte) allora $E(X) = nm/N$ e $Var(X) = \frac{N-n}{N-1}np(1-p)$ dove $p = m/N$.

ESERCIZIO 1

Tra gli esami di fine anno che Harry Potter deve sostenere alla Scuola di Magia e Stregoneria di Hogwarts vi è l'esame di Trasfigurazione, che consiste nel trasformare una pecora in un orso. Harry deve ripetere 5 prove, con 5 pecore diverse. Passa l'esame se riesce a trasformare almeno 3 pecore in orso.

La probabilità che Harry Potter riesca a trasformare una pecora in orso è pari a 2/3 se la pecora è bianca e pari a 1/2 se la pecora è nera. Le 5 pecore scelte sono nere o bianche con probabilità 1/2, indipendentemente l'una dall'altra.

1) Determinare la probabilità che Harry Potter superi l'esame di Trasfigurazione.
2) Determinare la probabilità che Harry Potter riesca a trasformare esattamente 2 pecore in orso sapendo che le prime 3 pecore sono nere e le altre 2 sono bianche.
3) Determinare la probabilità che tutte le 5 pecore siano nere sapendo che Harry Potter ha superato l'esame di Trasfigurazione.
4) Chiamato X il numero di pecore che Harry Potter ha trasformato in orso nelle 5 prove, calcolare come numero frazionario $E(X)$ e $Var(X)$.

ESERCIZIO 2 Da un mazzo di 40 carte si estraggono 4 carte senza rimpiazzo. Determinare la probabilità dei seguenti eventi:
1) I valori delle carte estratte appartengono all'insieme $\{2,3,4,5,6\}$,
2) Vengono estratte solo carte di bastoni oppure carte con valori nell'insieme $\{2,3,4,5,6\}$ (l'oppure non è esclusivo, non si tratta di un "o questo o quello").
3) le carte estratte non sono tutte di bastoni.

ESERCIZIO 3 *Per questo esercizio le risposte devono essere date in forma di numeri frazionari a/b con a e b esplicitamente calcolati.*
Sia X una variabile binomiale $Bin(3, 1/3)$. 1) Determinare la densità discreta di X e la funzione di distribuzione di X. 2) Calcolare la densità congiunta di X e X^2, 3) Dire se X e X^2 sono indipendenti e motivarne la risposta, 4) Calcolare $Cov(2X-1, X^3)$.

68

Calcolo delle Probabilità. Esame scritto (14/07/08) . TRACCE

ESERCIZIO 1

Calcoliamo la probabilità p che Potter superi una data prova. E e F siano gli eventi: E ="la pecora è nera", F ="H.Potter supera la prova". Allora

$$P(F) = P(F|E)P(E) + P(F|E^c)P(E^c) = (1/2)(1/2) + (2/3)(1/2) = 7/12.$$

Siccome le prove sono indipenenti, $X = Bin(5, 7/12)$.

1) Sia E_1 l'evento E_1 ="Harry supera l'esame di trasfigurazione". Allora,
$P(E_1) = P(X \geqslant 3) = \binom{5}{3}(7/12)^3(5/12)^2 + \binom{5}{4}(7/12)^4(5/12) + \binom{5}{5}(7/12)^5$

2) Chiamiamo A, B, C, D gli eventi
A ="le pecore trasformate in orso sono entrambe nere"
B ="le pecore trasformate in orso sono una nera e una bianca"
C ="le pecore trasformate in orso sono entrambe bianche"
E_2 ="H trasforma esattamente 2 pecore".
F="le prime 3 pecore sono nere e le ultime 2 bianche". Chiamiamo Q la probabilità conditzionata $P(\cdot|F)$. Dobbiamo calcolare $Q(E_2)$. Abbiamo:
$Q(E_2) = Q(E_2 \cap A) + Q(E_2 \cap B) + Q(E_2 \cap C) = \binom{3}{2}(1/2)^3(1/3)^2 + 3 \cdot 2 \cdot (1/2)^3(2/3)(1/3) + (1/2)^3(2/3)^2$

3)G ="tutte le 5 pecore sono nere". Per il Teorema di Bayes:
$P(G|E_1) = \frac{P(E_1|G)P(G)}{P(E_1)} = \frac{(1/2)^5(1/2)^5}{P(E_1)}$. $P(E_1)$ è stato calcolato al punto 1).

4) $E(X) = 5p = 35/12$, $Var(X) = 5p(1-p) = 5(7/12)(5/12) = 175/144$.

ESECIZIO 2

1) $p_1 = \binom{20}{4}/\binom{40}{4}$

2) Per il principio di esclusione-inclusione: $p_2 = \left(\binom{10}{4} + \binom{20}{4} - \binom{5}{4}\right)/\binom{40}{4}$.
$p_3 = 1 - \binom{10}{4}/\binom{40}{4}$

ESERCIZIO 3

1) $p_X(a) = \begin{cases} (2/3)^3 = 8/27 & \text{se } a = 0, \\ 3(2/3)^2(1/3) = 12/27 & \text{se } a = 1, \\ 3(2/3)(1/3)^2 = 6/27 & \text{se } a = 2, \\ (1/3)^2 = 1/27 & \text{se } a = 3, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$, $\quad F_X(a) = \begin{cases} 0 & \text{se } a < 0, \\ 8/27 & \text{se } 0 \leqslant a < 1 \\ 20/27 & \text{se } 1 \leqslant a < 2 \\ 26/27 & \text{se } 2 \leqslant a < 3 \\ 1 & \text{se } a \geqslant 3. \end{cases}$

2) Il vettore aleatorio (X, X^2) assume solo valori $(0,0), (1,1), (2,4), (3,9)$. Quindi

$$p_{X,X^2}(a,b) = \begin{cases} 8/27 & \text{se } (a,b) = (0,0), \\ 12/27 & \text{se } (a,b) = (1,1) \\ 6/27 & \text{se } (a,b) = (2,2), \\ 1/27 & \text{se } (a,b) = (3,9), \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

3) X e X^2 non sono indipendenti, in quanto se si conosce X allora si conosce X^2. Per una dimostrazione rigorosa basata sulla definizione di indipendenza, basta osservare che

$$P\left(X, X^2) = (0,1)\right) = 0 < P(X = 0)P(X^2 = 1)$$

4) $Cov(2X-1, X^3) = E((2X-1)X^3) - E(2X-1)E(X^3) = 2E(X^4) - E(X^3) - 2E(X)E(X^3) + E(X^3) = 2E(X^4) - 2E(X)E(X^3)$ Abbiamo che $E(X) = 3(1/3) = 1$, $E(X^4) = 12/27 + (6/27)16 + (1/27)81 = (12+96+81)/27 = 189/27$, $E(X^3) = 12/27 + (6/27)8 + (1/27)27 = (12+48+27)/27 = 87/27$, Quindi

$$Cov(2X-1, X^3) = 2(189/27) - 2(87/27) = 204/27$$

Calcolo delle probabilità - Esame scritto 10/09/08.

TEMPO A DISPOSIZIONE: 1 ora e 40 minuti.

Nota. Non è consentito l'uso di calcolatrici. I risultati devono essere esplicitamente calcolati come numeri frazioni (cioè devono essere della forma a/b con a e b numeri interi).

FORMULARIO

Se X è v.a. binomiale di parametri n, p, allora $E(X) = np$, $Var(X) = np(1-p)$.
Se X è v.a. geometrica di parametro p, allora $E(X) = 1/p$, $Var(X) = (1-p)/p^2$.
Se X è v.a. di Poisson con parametro λ, allora $E(X) = \lambda$, $Var(X) = \lambda$.
Se X è v.a. ipergeometrica di parametri n, N, m (tipo: estraggo senza rimpiazzo n palline da un'urna con m palline bianche e $N-m$ palline nere e X è il numero di palline bianche estratte) allora $E(X) = nm/N$ e $Var(X) = \frac{N-n}{N-1}np(1-p)$ dove $p = m/N$.

ESERCIZIO 1. Un'urna A contiene 6 palline: 3 verdi e 3 gialle. Un'urna B contiene 4 palline: 3 verdi e una gialla.
Considerare i seguenti esperimenti (fatti sempre a partire dalle urna A e B come appena descritte):
1) Si estrae una pallina dall'urna A e una dall'urna B. Calcolare la probabilità che siano di ugual colore.
2) Si estrare una pallina dall'urna A e la si inserisce nell'urna B. Poi si estrae una pallina dall'urna B. a) Calcolare la probabilità che la pallina estratta dall'urna B sia gialla. b) Calcolare la probabilità che la pallina estratta dall'urna A sia verde sapendo che quella estratta dall'urna B è gialla.
3) Si estraggono 2 palline dall'urna A e due palline dall'urna B. Chiamare X il numero di palline verdi estratte dall'urna A e Y il numero di palline verdi estratte dall'urna B. Determinare a) la densità discreta di X, b) la funzione di distribuzione di X, c) $E(2X^3+1)$, d) $Var(X+Y)$.

ESERCIZIO 2. Siano X_1, X_2, ...,X_5 variabili aleatorie di Bernoulli indipendenti di parametri $1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5$ rispettivamente. Calcolare
1) $E(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 - 10X_5)$,
2) $Var(X_1 - 2X_2 + X_3)$
3) $E(X_1X_2X_3)$.

ESERCIZIO 2. Una moneta truccata viene lanciata 10 volte. La moneta è tale che testa esce con probabilità $1/3$ e croce con probabilità $2/3$.
Sia X il numero di teste uscite nei primi quattro lanci e sia Y il numero di teste ottenute negli ultimi 6 lanci.
1) Calcolare $E(X+Y)$ e $Var(X+Y)$.
2) Dire se X e Y sono indipendenti (motivando la risposta).
3) Dire se X e X^2 sono indipendenti (motivando la risposta).
4) Calcolare la probabilità che al quarto lancio sia uscita testa condizionata al fatto che il numero totale di teste ottenute sia 2.

70

Calcolo delle Probabilità. Esame scritto 10/09/08
TRACCE DELLE SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

1)L'evento è l'unione di due eventi disgiunti: le palline estratte sono verdi; le palline estratte sono gialle. quindi

$$p = (3/6)(3/4) + (3/6)(1/4) = 1/2$$

2a) Siano
E="la pallina estratta dall'urna B è gialla",
F="la pallina estratta dall'urna A è gialla",
Si ha:

$$P(E) = P(E|F)P(F) + P(E|F^c)P(F^c) = (2/5)(1/2) + (1/5)(1/2) = 3/10$$

2b) Per i Teorema di Bayes:

$$P(F^c|E) = P(E|F^c)P(F^c)/P(E) = (1/5)(1/2)/(3/10) = 1/3$$

3a) X assume valori $0, 1, 2$.

$$p_X(a) = \begin{cases} \frac{\binom{3}{2}\binom{3}{0}}{\binom{6}{2}} = 1/5, & a = 0 \\ \frac{\binom{3}{1}\binom{3}{1}}{\binom{6}{2}} = 3/5, & a = 1 \\ \frac{\binom{3}{0}\binom{3}{2}}{\binom{6}{2}} = 1/5, & a = 2 \end{cases}$$

3b)

$$F_X(a) = \begin{cases} 0 & a < 0\,, \\ 1/5 & 0 \leqslant a < 1 \\ 4/5 & 1 \leqslant a < 2 \\ 1 & a \geqslant 1\,. \end{cases}$$

3c) $E(2X^3 + 1) = (1/5)(1) + (3/5)3 + (1/5)17 = 27/5$
3d) X e Y sono indipendenti, X è ipergeometrica di parametri $n = 2, m = 3, N = 6$, Y è ipergeometrica di parametri $n = 2, m = 3, N = 4$.

$$Var(X+Y) = Var(X)+Var(Y) = \frac{6-2}{6-1}2(1/2)(1/2)+\frac{4-2}{4-1}2(3/4)(1/4) = 2/5+1/4 = 13/20$$

ESERCIZIO 2

1) $E(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 - 10X_5) = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 - 10/5 = 1/12$
2) Essendo le variabili indipendenti si ha:

$$Var(X_1 - 2X_2 + X_3) = Var(X_1) + 4Var(X_2) + Var(X_3) = 0 + 4(1/2)(1/2) + (1/3)(2/3) = 11/9$$

3) Essendo le variabili indipendenti si ha

$$E(X_1X_2X_3)E(X_1)E(X_2)E(X_3) = 1(1/2)(1/3) = 1/6$$

ESERCIZIO 3

$X = Bin(4, 1/3)$, $Y = Bin(6, 1/3)$, X e Y sono indipendenti.
1)$E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 4/3 + 10/3 = 14/3$, $Var(X + Y) = 4(1/3)(2/3) +$

71

$6(1/3)(2/3) = 20/9$. In alternativa, si osservi che $X + Y = Bin(10, 1/3)$ e si applichino le formule.
2) X e Y sono indipendenti perchè si riferiscono ad esperimenti indipendenti (in senso operativo).
3) X e X^2 sono dipendenti (infatti l'uno determina univocalmente l'altro). per una verifica matematica, osserviamo che $P(X = 2, X^2 = 1) = 0$, mentre $P(X = 2), P(X^2 = 1) > 0$, quindi

$$P(X = 2, X^2 = 1) \neq P(X = 2)P(X^2 = 1)$$

4) E="al quarto lancio esce testa", F="il numero totale di teste è 2".

$$P(E|F) = P(E \cap F)/P(F) = \frac{9(1/3)^2(2/3)^8}{\binom{10}{2}(1/3)^2(2/3)^8} = 9/\binom{10}{2} = 1/5$$

ESERCIZI IN PREPARAZIONE ALL'ESAME SCRITTO

Alcuni esercizi sono tratti, parzialmente o completamente, dal libro *Calcolo delle probabilità* di Sheldon M. Ross, casa editrice Apogeo.

1. Formulario

Se X è v.a. binomiale di parametri n, p, allora $E(X) = np$, $Var(X) = np(1-p)$.
Se X è v.a. geometrica di parametro p, allora $E(X) = 1/p$, $Var(X) = (1-p)/p^2$.
Se X è v.a. di Poisson con parametro λ, allora $E(X) = \lambda$, $Var(X) = \lambda$.
Se X è v.a. ipergeometrica di parametri n, N, m (tipo: estraggo senza rimpiazzo n palline da un'urna con m palline bianche e $N-m$ palline nere e X è il numero di palline bianche estratte) allora $E(X) = nm/N$ e $Var(X) = \frac{N-n}{N-1}np(1-p)$ dove $p = m/N$.

2. Variabili aleatorie

ESERCIZIO 1 (Ross, Cap. 4, Es. 38). Se $E(X) = 1$ e $Var(X) = 5$ su trovi: (a) $E[(2+X)^2]$, (b) $Var(4+3X)$.

ESERCIZIO 2 (Esonero parziale 20/12/05).
1) Dire se esistono variabili aleatorie X e Y, con X a valori in $\{0,2\}$ e Y a valori in $\{-1,0,1\}$, la cui densità congiunta è rappresentata dalle entrate della seguente tabella:

$X \setminus Y$	-1	0	1
0	1/6	1/6	0
2	1/3	1/6	1/6

(cioè $p_{(X,Y)}(0,-1) = 1/6$, $p_{(X,Y)}(0,0) = 1/6$, $p_{(X,Y)}(0,1) = 0$,...).
2) In caso affermativo determinare la densità discreta di X e di Y, la funzione di distribuzione di X e calcolare $E(10X+3Y)$, $E(XY)$, $Cov(X,Y)$ e $Var(X)$. Dire inoltre se X e Y sono variabili aleatorie indipendenti.

3. Variabile aleatoria binomiale e schema di Bernoulli

ESERCIZIO 1 (Ross, Cap. 4, Es. 41). Un uomo afferma di avere poteri extrasensoriali. Come test, viene lanciata 10 volte una moneta equilibrata e si chiede all'uomo di preverderne l'esito in anticipo. Lui indovina 7 dei 10 risultati. Qual è la probabilità che lo abbia conseguito se non è dotato dei suddetti poteri (ovvero ha agito in maniera casuale)? In generale, se l'uomo agisce in maniera casuale, qual è il numero medio di esiti che riesce ad indovinare?

ESERCIZIO 2 (Ross, Cap. 4, Es. 43). Un canale di comunicazione trasmette i numeri 0 e 1. I numeri trasmessi vengo ricevuti in maniera non corretta con probabilità pari a 0.2, indipendentemente l'uno dall'altro. Supponiamo che vogliamo trasmettere un numero binario di n cifre. Per ridurre la possibilità d'errore, trasmettiamo 00000 al posto di 0 e 11111 al posto di 1. Chi riceve il messaggio lo decodifica come segue: ogni 5 cifre le interpreta come uno 0 se ci sono più 0 che 1 e viceversa come un 1 se ci sono più 1 che 0. Qual è la probabilità che il messaggio venga decodificato in maniera errata?

ESERCIZIO 3 (Ross, Cap. 4, Es.45). Uno studente si sta preparando per sostenere un esame orale. Verrà interrogato o dall'assistente o dal professore. Nel primo caso avrà probabilità pari a 0.8 di rispondere esattamente a ognuna delle domande postegli, in maniera indipendente l'una dall'altra. Nel caso sia il professore ad interrogarlo, questa probabilità sarà pari a 0.4. Supponiamo che lo studente passi l'esame se risponde a più della metà delle domande. Se lo studente pensa di avere probabilità doppia di fare l'esame con il professore piuttosto che con l'assistente (legge di Murphy), dovrebbe sperare che gli vengano fatte 3 o 5 domande?

ESERCIZIO 4 (Ross, Cap. 4, Es. 49). Supponiamo che il 10 per cento dei chip costruiti da un'azienda di hardware siano difettosi. Se ordiniamo 100 chip, il numero di chip difettosi che riceviamo segue una distribuzione binomiale (cio è è una v.a. binomiale)?

ESERCIZIO 5. Si lancia 10 volte una moneta onesta e poi 6 volte una moneta truccata per cui la probabilità di avere testa è $1/3$ e di avere croce $2/3$. Si chiami X il numero di volte in cui esce testa. Determinare $P(X = 0)$, $E(X)$, $Var(X)$.

ESERCIZIO 6 (Ross, Cap. 4 , Es. 76). Un rivenditore compra i transistor a lotti di 20. La sua politica è di controllare 4 componenti di ogni singolo lotto e di accettarlo solo se tutti e 4 i campioni non sono difettosi. Se ogni componente in un lotto è difettoso, indipendentemente dagli altri, con probabilità pari a 0.1, qual è la percentuale di lotti che vengono rifiutati?

4. Variabile aleatoria geometrica e variabile aleatoria ipergeometrica

ESERCIZIO 1 (Ross, Cap. 4, Es. 73). Un'urna contiene 4 palline bianche e 4 palline nere. Scegliamo a caso 4 palline. Se due di esse sono bianche e due sono nere, ci fermiamo. Altrimenti, rimettiamo le palline nell'urna e di nuovo estraiamo 4 palline in modo casuale. Continuamo così fino a quando non si pescano 2 palline bianche e 2 palline nere. Qual è la probabilità che facciamo esattamente n estrazioni? Qual è il numero medio di estrazioni?

ESERCIZIO 2. Da un'urna contenente 5 palline rosse, 4 palline verdi e 6 palline gialle si estraggone 5 palline senza rimpiazzo.
1) Chiamato X il numero di palline verdi estratte, si determini la densità discreta di X, $E(X)$, $Var(X)$ e $E((X+1)^2)$.
2) Supponiamo di ripetere l'estrazione delle 5 palline, con successivo reinserimento, fino a quando non si estraggono 4 palline verdi. Chiamato T il numero di estrazioni effettuate (inclusa l'ultima, in cui vengono estratte 4 palline verdi), determinare $P(T = \infty)$, $E(T)$, $Var(T)$.

ESERCIZIO 3. Vi sono due mazzi da 40 carte. Si estraggono 10 carte dal primo mazzo e poi 6 carte dal secondo mazzo (sempre senza rimpiazzo). Sia X il numero totale di carte di denari estratte. Determinare $E(X)$ e $Var(X)$.

ESERCIZIO 4 (Ross, Cap 4, Es 74). Supponiamo che un gruppo di 100 componenti elettronici ne contenga 6 difettosi e 94 funzionanti. Se X denota il numero dei componenti difettosi in un campione casuale di 10 componenti scelti da un gruppo di 100, si trovi: (a)

$P(X = 0)$; (b) $P(X > 2)$; (c) E(X), (d) Var(X).

5. Esperimenti indipendenti

ESERCIZIO 1. (Esonero parziale 29/11/05) Supporre che per volare da Roma a Berlino vi siano le seguenti tre possibilità:
a) si vola direttamente da Roma a Berlino con la compagnia Air Berlin,
b) si vola direttamente da Roma a Berlino con la compagnia Easy Jet,
c) si vola con l'Alitalia prima da Roma a Milano, a Milano si cambia aereo e si vola sempre con l'Alitalia da Milano a Berlino (in questo secondo caso si fanno due voli distinti).
A causa di uno sciopero europeo dei dipendenti delle compagnie aeree alcuni voli vengono cancellati. Supporre che la probabilità che un dato volo venga cancellato sia pari a 2/3 e che la cancellazione di un singolo volo sia indipendente dalla cancellazione o meno degli altri voli.
Determinare la probabilità che nella giornata di sciopero sia possibile raggiungere in aereo Berlino partendo da Roma.

6. Probabilità condizionata

ESERCIZIO 1 (Ross, Cap. 3, Es. 45). Supponiamo che un test per il cancro sia accurato al 95 per cento sia tra i malati che tra i sani. Se lo 0.4 per cento della popolazione è formata da malati di cancro, calcolare la probabilità che una persona che effettua il test abbia il cancro, sapendo che il test lo afferma.

ESERCIZI IN PREPARAZIONE DELL'ESAME SCRITTO

Soluzioni

VARIABILI ALEATORIE

- ES.1 a) $E((2+X)^2) = E(4+4X+X^2) = 4+4E(X)+E(X^2)$

$Var X = E(X^2) - (EX)^2$. $E(X^2) = Var(X) + E(X)^2 = 5+1 = 6$

$\Rightarrow E((2+X)^2) = 4+4+6 = 14$

b) $Var(4+3X) = 9\, Var(X) = 9 \cdot 5 = 45$

- ES.2 Vedi file con correzione esonero 20/12/05

VARIABILE ALEATORIA BINOMIALE E SCHEMA DI BERNOULLI

- ES.1 $X := \#$ esiti azzeccati. $X = Bin(10, 1/2)$

$P(X=7) = \binom{10}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \binom{10}{7}\frac{1}{2^{10}} = \binom{10}{3}\frac{1}{2^{10}} = \frac{10\,9\,8}{1 \cdot 2 \cdot 3}\,\frac{1}{2^{10}}$

$= \frac{5 \cdot 3 \cdot 8}{2^{10}} = \frac{5 \cdot 3}{2^7} = \frac{15}{128} = 0{,}1171875$

$E(X) = 10 \cdot 1/2 = 5.$

- ES.2 Supponiamo di voler comunicare 0, quindi trasmettiamo "00000". Definiamo $X :=$ numero di cifre tra "00000" che vengono trasmesse correttamente. Allora $X = Bin(5, 4/5)$

Il messaggio è ben decodificato se e solo se $X \geq 3$.

$P(X \geq 3) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)$

$= \binom{5}{3}\left(\frac{4}{5}\right)^3\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \binom{5}{4}\left(\frac{4}{5}\right)^4\left(\frac{1}{5}\right) + \binom{5}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^5$

$= 10\,\frac{4^3}{5^2} + 5 \cdot \frac{4^4}{5^5} + \frac{4^5}{5^5} = \frac{4^3}{5^5}(10+20+16) = \frac{4^3}{5^5}\,46 = \frac{294}{312}$

Quindi la probabilità che il messaggio iniziale "00000" venga decodificato bene è $p = \frac{2944}{3125} = 0{,}94208$

Analogamente la probabilità che il messaggio iniziale "111 venga ben decodificato è $p = \frac{2944}{3125}$.

Ora vogliamo trasmettere un numero binario di n cifre. A tal fine inviamo n blocchi di 5 cifre ciascuno. La prob. che il messaggio trasmesso venga ben decodificato

è pari alla probabilità che ciascun blocco venga ben decodificato, quindi vale p^n.
In conclusione, la prob. che il messaggio trasmesso non sia ben decodificato è $1-p^n = 1-\left(\frac{2944}{3125}\right)^n$.

• ES. 3. Definiamo gli eventi E = "lo studente è interrogato dal prof", F = "lo studente è interrogato dall'assistente", A = "lo studente passa l'esame".
$E \cap F = \emptyset$ e $E \cup F = S$ (S spazio campionario). Quindi
$P(E) + P(F) = P(E \cup F) = 1$. Sappiamo che $P(E) = 2P(F)$.

$$\begin{cases} P(E)+P(F)=1 \\ P(E) = 2P(F) \end{cases} \Rightarrow P(E) = \frac{2}{3} \quad P(F) = 1/3$$

1° caso: Allo studente fanno 3 domande. Allora A diventa
A = "lo studente risponde bene ad almeno 2 domande".
$P(A) = P(A|E)P(E) + P(A|F)P(F)$

$$P(A|E) \underset{\uparrow}{=} \binom{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \frac{3}{5} + \binom{3}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^3 = 3 \cdot \frac{4 \cdot 3}{5^3} + \frac{2^3}{5^3} = \frac{36+8}{125} = \frac{44}{125}$$

risponde bene con
prob. $0,4 = 2/5$

$$P(A|F) \underset{\uparrow}{=} \binom{3}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot \frac{1}{5} + \binom{3}{3}\left(\frac{4}{5}\right)^3 = 3 \cdot \frac{4^2}{5^3} + \frac{4^3}{5^3} = \frac{48+64}{125} = \frac{112}{125}$$

risponde bene con
prob. $0,8 = 4/5$

$$P(A) = \frac{44}{125} \cdot \frac{2}{3} + \frac{112}{125} \cdot \frac{1}{3} = \frac{88+112}{125 \cdot 3} = \frac{200}{125 \cdot 3} = \frac{8}{5 \cdot 3} = \frac{8}{15}$$

2° caso: Allo studente fanno 5 domande. Allora A diventa
A = "lo studente risponde bene ad almeno 3 domande".
$P(A) = P(A|E)P(E) + P(A|F)P(F)$.

$$P(A|E) = \binom{5}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \binom{5}{4}\left(\frac{2}{5}\right)^4\left(\frac{3}{5}\right) + \left(\frac{2}{5}\right)^5$$
$$= \frac{1}{5^5}\left[10 \cdot 8 \cdot 9 + 5 \cdot 16 \cdot 3 + 32\right] = \frac{992}{5^5}$$

$$P(A|F) = \binom{5}{3}\left(\frac{4}{5}\right)^3\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \binom{5}{4}\left(\frac{4}{5}\right)^4 \cdot \frac{1}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^5$$
$$= \frac{1}{5^5}\left[10 \cdot 64 + 5 \cdot 256 + 1024\right] = \frac{2944}{5^5}$$

$P(A) = \frac{992}{5^5} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2944}{5^5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4.928}{9.375} = 0,525653$

QUINDI, P(A) è maggiore se vengono fatte 3 domande.

- ES.4. p = prob. che un chip sia difettoso = 1/10.
  # chip difettosi = Bin (100, 1/10) se ogni singolo chip è difettoso o meno indipendentemente dallo stato degli altri.

- ES.5. $X_1 :=$ # teste uscite nei lanci della moneta onesta.
  $X_2 :=$ # teste uscite nei lanci della moneta difettosa
  $X_1 = Bin(10, 1/2)$, $X_2 = Bin(6, 1/3)$, X_1 e X_2 sono independ
  $X = X_1 + X_2$.
  $P(X=0) = P(X_1=0, X_2=0) = P(X_1=0)P(X_2=0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{1}{2^4 \cdot 3^6}$
  $E(X) = E(X_1) + E(X_2) = 10 \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot \frac{1}{3} = 5 + 2 = 7$
  $Var(X) = Var(X_1) + Var(X_2) = 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot \frac{1}{3} \frac{2}{3} = \frac{5}{2} + \frac{4}{3} = \frac{15+8}{6} = \frac{23}{6}$

- ES6. Ogni campione ha prob. 0,1 = 1/10 di essere difettoso.
  $X :=$ # transistor difettosi tra i campioni scelti.
  $X = Bin(4, 1/10)$.
  Probabilità che il lotto sia rifiutato $= P(X>0) = 1 - P(X=0)$
  $= 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^4 = 0,3439$
  La percentuale che di lotti rifiutati è in media 34,39%.

V.A. GEOMETRICA E V.A. IPERGEOMETRICA

- ES.1. p = prob. di estrarre 2 palline bianche e 2 palline nere nella singola estrazione.

$$p = \frac{\binom{4}{2}\binom{4}{2}}{\binom{8}{4}} = \frac{6 \cdot 6}{\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}} = \frac{36}{7 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{18}{7 \cdot 5} = \frac{18}{35} = 0,51428\ldots$$

$X :=$ numero estrazioni fatte
X è v.a. geometrica di parametro p.
$P(X=n) = (1-p)^{n-1} p = \left(\frac{17}{35}\right)^{n-1} \frac{18}{35} = 17^{n-1} \cdot 18 / 35^n$
$E(X) = 1/p = 35/18 = 1,944\ldots$

• ES. 2. 1) X assume valori 0, 1, 2, 3, 4 e

$$p_X(k) = P(X=k) = \frac{\binom{4}{k}\binom{11}{5-k}}{\binom{15}{5}} \quad , k = 0,1,2,3,4$$

X è v.a. ipergeometrica di parametri (vedi formulario) $n=5$, $m=4$, $N=15$. Poniamo $p = \frac{m}{N} = \frac{4}{15}$. Allora

$$E(X) = \frac{n \cdot m}{N} = \frac{5 \cdot 4}{15} = 4/3$$

$$Var(X) = \frac{N-n}{N-1} \cdot n \cdot p(1-p) = \frac{15-5}{15-1} \cdot 5 \cdot \frac{4}{15} \cdot \frac{11}{15} = \frac{10}{14} \cdot 5 \cdot \frac{4}{15} \cdot \frac{11}{15}$$

$$= \frac{4 \cdot 11}{7 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{44}{63}$$

$$E((X+1)^2) = E(X^2) + 2E(X) + 1$$
$$E(X^2) = Var(X) + E(X)^2 = \frac{44}{63} + \frac{16}{9} = \frac{44+16 \cdot 7}{63} = \frac{156}{63} = \frac{52}{21}$$
$$E((X+1)^2) = \frac{52}{21} + 2 \cdot \frac{4}{3} + 1 = \frac{52 + 7 \cdot 8 + 21}{21} = \frac{129}{21}$$

2) T è v.a. geom di parametro $p = P(X=4) = \frac{11}{\binom{15}{5}} = \frac{11}{3003} = \frac{1}{273}$

• $P(T=\infty)=0$. Infatti $P(T>k) = (1-p)^k$ e $\{T=\infty\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{T>k\}$. Per i teoremi limite di successioni di eventi monotone $P(T=\infty) = \lim_{k \to \infty} P(T>k) = \lim_{k \to \infty} (1-p)^k =$

• $E(T) = 1/p = 273$

• $Var(T) = \frac{1-p}{p^2} = \left(1 - \frac{1}{273}\right) 273^2 = 273^2 - 273 = 74.256$

• ES. 3. $X_1 :=$ # carte di denari estratte dal 1° mazzo.

$X_2 :=$ # carte di denari estratte dal 2° mazzo

$X = X_1 + X_2 \Rightarrow E(X) = E(X_1) + E(X_2)$.

X_1 e X_2 sono indipendenti $\Rightarrow Var(X) = Var(X_1) + Var(X_2)$

X_1 è v.a. ipergeometrica di parametri $n=10$, $m=10$, $N=40$

Posto $p = \frac{m}{N} = \frac{10}{40} = 1/4$, $E(X_1) = \frac{n \cdot m}{N} = \frac{10 \cdot 10}{40} = 5/2$,

$$Var(X_1) = \frac{N-n}{N-1} \cdot n \cdot p \cdot (1-p) = \frac{30}{39} \cdot 10 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{75}{52}$$

X_2 v.a. ipergeometrica di parametri $n=6$, $m=10$, $N=40$. Pongo $p:=\frac{m}{N}$

$$E(X_2)=\frac{n\cdot m}{N}=\frac{6\cdot 10}{40}=6/4=3/2$$

$$Var(X_2)=\frac{N-n}{N-1}\,n\,p(1-p)=\frac{34}{39}\cdot 6\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{17\cdot 3}{13\cdot 16}=\frac{51}{208}$$

$$\Rightarrow E(X)=5/2+3/2=4$$

$$Var(X)=\frac{75}{52}+\frac{51}{208}=\frac{75}{13\cdot 4}+\frac{51}{13\cdot 16}=\frac{75\cdot 4+51}{13\cdot 16}=\frac{351}{208}$$

- ES.4. X è v.a. ipergeometrica di parametri $n=10$, $m=6$, $N=100$. $p:=\frac{m}{N}=$

(a) $$P(X=0)=\frac{\binom{94}{10}}{\binom{100}{10}}=\frac{\cancel{94}\cdot\cancel{93}\cdot\cancel{92}\cdot\cancel{91}\cdot 90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86\cdot 85\cdot 84}{100\cdot 99\cdot 98\cdot 97\cdot 96\cdot 95\cdot\cancel{94}\cdot\cancel{93}\cdot\cancel{92}\cdot\cancel{91}}=0{,}522$$

(b) $$P(X>2)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)$$
$$=1-\frac{\binom{94}{10}}{\binom{100}{10}}-\frac{\binom{94}{9}\binom{6}{1}}{\binom{100}{10}}-\frac{\binom{94}{8}\binom{6}{2}}{\binom{100}{10}}=\dots$$

(c) $$E(X)=\frac{n\cdot m}{N}=\frac{10\cdot 6}{100}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

(d) $$Var(X)=\frac{N-m}{N-1}\cdot n\cdot p(1-p)=\frac{100-10}{100-1}\cdot 10\cdot\frac{6}{100}\cdot\frac{94}{100}=\frac{90\cdot 10\cdot 6\cdot 94}{99\cdot 100\cdot 100}$$

$$=\frac{9\cdot 6\cdot 94}{99\cdot 100}=\frac{6\cdot 94}{11\cdot 100}=\frac{3\cdot 47}{11\cdot 25}=\frac{141}{275}$$

ESPERIMENTI INDIPENDENTI Vedi file correzione esonero 29/11/2

PROBABILITÀ CONDIZIONATA

ES 1. F="la persona è malata", E="il test afferma che la persona è ma

$P(F)=\frac{0{,}4}{100}$ $P(E\mid F)=\frac{95}{100}$ $P(E^c\mid F^c)=\frac{95}{100}$ Per teor. di Bayes

$$P(F\mid E)=\frac{P(E\mid F)P(F)}{P(E\mid F)P(F)+P(E\mid F^c)P(F^c)}=\frac{\frac{95}{100}\cdot\frac{0{,}4}{100}}{\frac{95}{100}\cdot\frac{0{,}4}{100}+\frac{5}{100}\cdot\frac{99{,}6}{100}}$$

$$=\frac{95\cdot 0{,}4}{95\cdot 0{,}4+5\cdot 99{,}6}$$

80